Казахский национальный университет имени аль–Фараби
Институт информационных и вычислительных технологий КН МНВО РК

УДК 004.021(043) На правах рукописи

БЛИЕВА ДАНА НАЗАРБАЕВНА

Разработка алгоритма решения динамических уравнений пороупругости на основе спектрального метода

6D060200–Информатика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант доктор физико–математических наук, профессор Бердышев А.С.

Зарубежный научный консультант доктор философии (Ph.D), профессор Альберто Кабада (Университет Саньтьяго де Компостела, Испания)

Республика Казахстан
Алматы 2024

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертационной работе использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСТ 7.1–84 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическое описание документа. Общие требования и правила составления.

ГОСТ 7.9–95 (ИСО214–76) Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Реферат и аннотация. Общие требования.

ГОСТ 7.12–93 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая запись. Сокращения слов на русском языке. Общие требования и правила.

Инструкция по оформлению диссертации и автореферата 2004 г.

ГОСТ 7.1-2003 Библиографическая запись. Библиографическое описание.

Общие требования и правила составления.

ГОСТ 8.417–81 Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы физических величин.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\vec{u}$, $\vec{v}$ – скорость упругого пористого тела и жидкости

$\rho_{0,s}$, $\rho_{0,l}$ – парциальная плотность упругого пористого тела и жидкости

ρ_0 – плотность флюидонасыщенной пористой среды

$\rho^f_{0,s}$, $\rho^f_{0,l}$ – физическая плотность упругого пористого тела и жидкости

p – поровое давление

σ_{ik} – компоненты тензора напряжений

$\delta_{i,k}$ – символ Кронекера

d_0 – пористость

K – упругий модуль объемного сжатия твердой компоненты гетерофазной среды

λ , μ – коэффициенты Ламе

γ – модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды

c_s – скорость распространения поперечной волны

c_{p1} , c_{p2} – скорость распространения быстрой и медленной продольной волны

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы

В данной диссертационной работе был разработан алгоритм численно-аналитического решения уравнений пороупругости. На основе спектрального метода была поставлена корректная задача с начальными и граничными условиями для данного уравнения. В результате полученная модель описывает распространение сейсмических волн в насыщенный флюидом пористой среде.

Явное аналитическое решение удалось получить, сведя исходную задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнении. Для этого было использовано интегральное преобразование Фурье–Лапласа. В работе доказана корректность постановки задачи, выведены условия разрешимости системы.

Для численного решения использовался конечно-разностный метод на разнесенной (шахматной) сетке. Проведена численная реализация и верификация метода на основе физических параметров и формы сейсмического импульса, полученных из реальных данных. Были проведены два численных эксперимента с различными наборами данных и функциями импульса.

В рамках работы был разработан интерфейс, облегчающий проведение вычислительных экспериментов, а также позволяющий получать динамическую визуализацию процесса распространения сейсмических волн.

Актуальность темы

Современный мир предоставляет обширные примеры пропитанных флюидом (жидкостями) упруго-пористых сред. Математическое и компьютерное моделирование процессов, происходящих в этих средах, представляет собой существенное и актуальное направление в современных исследованиях. Это направление не только позволяет решать значимые научно-технические задачи, но также проводить теоретические и экспериментальные исследования с интенсивным использованием вычислительных технологий.

В современной науке и технике происходит активное развитие компьютерного моделирования распространения волн в пористых средах, насыщенных жидкостью. Это становится неотъемлемой частью решения прикладных задач в геофизике, биомеханике и нефтяной промышленности. Создание реалистичных моделей играет важную роль в объяснении наблюдаемых эффектов в сейсмических исследованиях свойств горных пород при наличии поровой жидкости.

На рисунке 1 для наглядности приведена фотография образца пористой породы, содержащей пластовые флюиды, таких как нефть и вода. На рисунке 2 приведены снимки электронного микроскопа той же пористой породы, демонстрирующей ее пористую структуру на микроуровне.

Рисунок 1 – Фото образца пористой породы, содержащей пластовые флюиды (нефть, вода и т.п.)

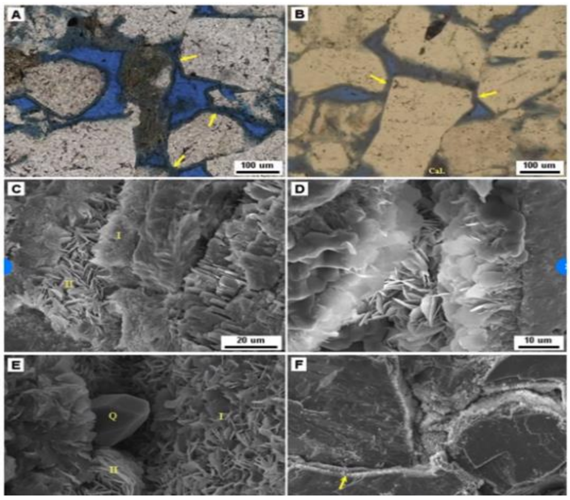


Рисунок 2 – Снимки электронного микроскопа пластовой породы

Коэффициент пористости – это соотношение объема пор к объему твердой части, выраженное в долях единицы.

На рисунке 3 приведено схематическое изображение строения пористой среды, где желтым цветом изображены частицы твердого каркаса пористого тела, а голубым - насыщающая поры жидкость. На рисунке 4 приведены различные виды биологических тканей, также имеющих пористую структуру, насыщенную жидкостью.

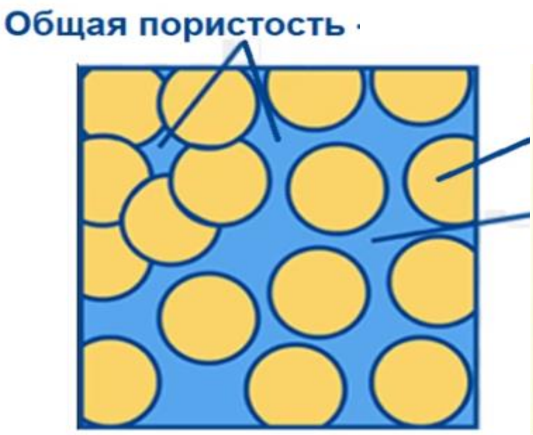


Рисунок 3 – Схема пористой среды

Рисунок 4 – Виды биологических тканей с различной пористостью

Анализ современной научной литературы выделяет, что изучение потоков жидкости в пористых средах занимает ведущее положение в области компьютерного и математического моделирования. Разнообразие структур в пористых средах охватывает как естественные, так и искусственные материалы. Эта многообразность предоставляет нам сложные задачи и в моделировании физических свойств. Без учета этой сложности становится непросто предвидеть и оценивать эффективность применения пористых материалов в новых технологических процессах. В итоге, развитие методов изучения пористых сред оказывает положительное влияние на множество прикладных областей.

Данный факт подтверждается тем, что поиск только по нескольким ключевым словам «теория пороупругости», «пористые материалы», «распространение волн», «поровое давление» в базе Web of Science Core Collection выдал информацию о 96,982 публикациях на эти темы с разбивкой по приложениям в самых разных научных отраслях, как показано на рисунке 5:

Рисунок 5 – Анализ количества публикаций по темам пороупругости в Web of Science Core Collection с разбивкой по областям применения

Анализ количества публикаций на эту тему по годам также демонстрирует постоянный рост, превышающий несколько тысяч публикаций ежегодно, и удваивается каждые десять лет, достигнув 6000 публикаций в 2021 году, как показано на рисунке 6:

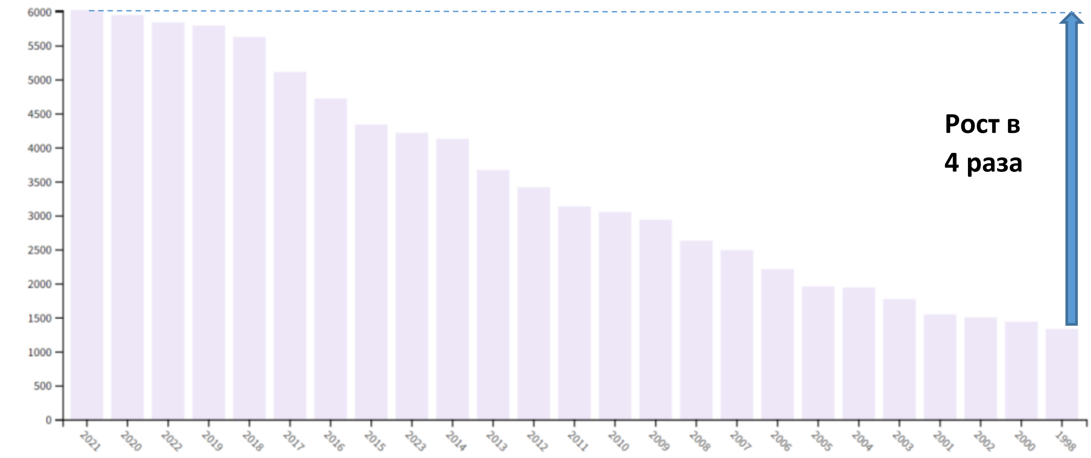


Рисунок 6 – Анализ количества публикаций по темам пороупругости в Web of Science Core Collection по годам за период 1999–2022 гг.

Анализ аффилированности публикуемых работ по темам пороупругости показывает, что активные исследования в данном направлении ведутся во всех ведущих научных центрах мира, включая ведущие государственные научные учреждения Европы (Франции, Швейцарии), Индии, Китайская академия наук, Российская академия наук, ведущие ВУЗы США (Калифорнии, Техаса, Пенсильвании, MIT), Франции, Китая, Великобритании и т.д., как показано на рисунке 7.

Рисунок 7 – Анализ аффилированности авторов публикаций по теме пороупругости в Web of Science Core Collection

Обзор современных исследований пороругости

Модель Френкеля-Био, традиционно применяемая для численного моделирования процессов в пористых средах, исследует относительное смещение матрицы и флюида с учетом межфазного взаимодействия. Эта модель была первоначально предложена советским физиком-теоретиком Я.И. Френкелем в 1944 году [1] и дальше развита бельгийско-американским физиком М.Э. Био в 1956 году [2]. Оба ученых справедливо считаются основоположниками теории пороупругости.

Теория Френкеля-Био изначально была разработана для изучения физических процессов во влажной почве, представляющей собой среду, состоящую из жесткого пористого каркаса, наполненного жидкостью. Позднее эта модель нашла применение в математическом моделировании физических процессов во флюидонасыщенных пористых средах.

В теории Френкеля-Био, при анализе распространения сейсмических волн в пористых средах [3], учтено не только присутствие быстрых продольных и поперечных волн, но и наличие вторичной продольной волны. Скорости распространения этих волн в модели Френкеля-Био зависят от четырех упругих параметров и учитывают различные физические характеристики, такие как пористость, плотности матрицы и жидкости.

В работах [4-8] показаны различные представления модели Био и их модификаций. Приведены теоремы корректности, различные численные методы решения моделей Био. В данной диссертации будет также затронуто направление дальнейших исследований в этой области.

Процесс математического моделирования включает как минимум три этапа:

формулирование уравнений, описывающих свойства среды с учетом разных физических законов;

создание алгоритма для численной реализации;

разработка компьютерной программы для визуализации и анализа процесса.

Успешное завершение этих этапов обеспечивает значительный экологический и экономический эффект [9].

Каждый этап представляет собой отдельное направление исследований, и в данной диссертации будут рассмотрены ключевые аспекты каждого этапа. Они также упомянуты в многочисленных исследованиях ученых и изложены в соответствующих публикациях [5, с.3; 6, p.333; 7, p.75A229; 8, c.103; 9-28].

В индустрии и геофизике применяются различные математические модели для решения ключевых задач. В геофизических исследованиях активно используют методы сейсмического анализа для выявления и определения геологических структур. Этот подход основан на распространении упругих волн в горных породах, что предоставляет информацию о структуре земной коры.

Работа [11, с.3] подчеркивает значимость математического моделирования пороупругости в различных областях науки и техники. В работе выделяется особая роль численного решения в контексте разработки месторождений нефти и газа, используя схемы расщепления по физическим процессам.

В работе [11, с.5] также отмечается важность и актуальность исследований в области геофизики пластов. Показан примеры применения ультразвукового и сейсмического моделирования пористой среды позволяет изучать свойства пород и анализировать сейсмическую реакцию геологических образований.

В работе [11, с 7] представлен обзор численных методов для решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих распространения волн в насыщенных жидкостью средах.

В работе моделирование базируется на теории динамической пороупругости Био. Рассматриваются различные техники и аспекты численной реализации. В качестве механизма потерь и продольных волн в пористых средах выступает диффузионные волны Био.

В нефтегазовой отрасли математические модели используются для улучшения методов добычи углеводородов. Это включает в себя анализ того, как наилучшим образом использовать продуктивные слои, прогнозирование и планирование добычи, а также уменьшение возможных повреждений пластов, которые могут возникнуть в процессе добычи нефти и газа. Проблемы, связанные с пороупругостью и движением флюидов в пористых средах, играют важную роль в разработке месторождений нефти и газа [11, с.4].

Пренебрежение оценкой деформационных процессов может повлечь серьезные последствия, включая разрушение пластов, сопровождаемое экономическими и экологическими убытками. Примером служит нефтяное месторождение Уилмингтон в Калифорнии, США, где с 1938 по 1966 год произошли значительные деформации поверхности земли, землетрясения и разрушение инфраструктуры.

Также существуют аналогичные случаи в разных регионах мира [12, с.83], например, венесуэльское месторождение Lagunilas, открытое в 1926 году, испытывало просадку до 4,1 метра к 1976 году. Норвежское месторождение Экофиск, открытое в 1970 году, имело опускание в 2,6 метра к 1985 году. Республика Азербайджан зарегистрировала опускание до 3,0 метра на месторождении Сураханы, открытом в 1904 году, и до 2,45 метра на месторождении Балаханы-Сабунчи-Романы, открытом в 1871 году. В США, месторождение Buena Vista, открытое в 1910 году, показало опускание более 2,3 метра к 1964 году. Землетрясение в поселке Газли (Узбекистан) в 1976 и 1984 годах, вызванное разработкой газового месторождения. Разрушение города Нефтегорска на Сахалине в 1995 году, также обусловленное разработкой нефтяных месторождений. Татарстанский случай с месторождением Ромашкинское, где в 1987-1997 годах зарегистрировано около 700 землетрясений с силой 4-5 баллов.

В экспериментах [16, с.382] доказаны правильность теории Био М.А.

Применение математических моделей [25] становится ключевым для точного прогнозирования и управления процессами, обеспечивая эффективное управление месторождениями и снижение их воздействия на окружающую среду.

В труде [29], основываясь на общих первых принципах физики, автор разработал нелинейную математическую модель для пористых сред. В этой модели Доровского указаны две продольные и одна поперечная звуковые колебаний. В отличие от моделей типа Френкеля-Био, линеаризованная модель Доровского характеризует среду с помощью трех упругих параметров, взаимно-однозначно выраженных через три скорости упругих колебаний.

Дальнейшие исследования [30–34] были посвящены применению спектрального метода Лагерра для численного решения динамических уравнений пороупругости.

Таким образом модель Доровского является модификацией модели пороупругости Био и расширяет ее за счет включения дополнительных параметров, которые учитывают механическое и жидкостное поведение пороупругого материала [35,36]. Одним из ключевых отличий модели Доровского от модели Био является включение в нее параметра κ – времени релаксации сорбции, который описывает, как молекулы жидкости перемещаются в порах материала под нагрузкой, характеризующий механическую реакцию сорбированного флюида на внешнее воздействие, которая явно не включена в модель Био. Этот параметр учитывает эффекты прилипания жидкости к твердому каркасу пористого материала и может помочь лучше описать общее механическое поведение материала при деформации.

Модель Доровского вводит новые параметры для описания взаимодействия жидкостей и твердых тел в пористом материале и результирующего воздействия на деформацию и течение жидкости. Модель использовалась для изучения различных приложений, включая механику земной коры и поведение геотермальных резервуаров.

Связь темы диссертации с планами научных работ. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами фундаментальной научно–исследовательской работы (НИР) КН МОН РК по проекту на тему «Математическое моделирование динамики упруго–деформируемых пористых сред с учетом частной зависимости коэффициента трения (с памятью)» (2017–2020) гг. № гос.регистрации 0118РК00126, шифр АР05131026) под руководством д.ф.–м.н. проф. Бердышева А.С. Результаты исследовательской работы [37] послужили основой для разделов данной диссертации.

Цель работы

Целью данной диссертационной работы является создание алгоритма и проведение исследования методов численно-аналитического решения начально-краевой задачи для системы динамических уравнений пороупругости. Эта система уравнений предназначена для описания процессов распространения сейсмических волн в пористой среде, насыщенной флюидами.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи:**

– исследовать существующие методы аналитического и численного решения динамических уравнений пороупругости, провести анализ существующих математических моделей, описывающих распространение акустических волн в упруго–пористой среде;

– исследовать модели, описывающей динамические процессы, происходящие в однослойной пористой среде, характеризуемой физическими параметрами;

– обосновать корректность постановки исходной начально–краевой задачи для решения динамических уравнений, определить условия разрешимости задачи, и получить аналитическое решение в явном виде;

– разработать эффективный алгоритм численного решения, провести численную реализацию с последующей верификацией для большой области определения пространственных переменных и реальных значений исходных физических параметров;

– построить визуализации результатов вычислительных процессов с помощью автоматизированного интерфейса.

Объект исследования: динамические процессы, происходящие в пороупругой среде, насыщенной жидкостью и ее физические свойства при распространении в ней сейсмических волн.

Предметом исследования является математическая модель для двумерного случая и аппроксимирующая ее разностная схема, реалистично описывающая физические процессы, происходящие во флюидонасыщенной упругопористой среде в полуплоскости, характеризуемой различными параметрами.

Методы исследования

В данной диссертации исследуется система уравнений, описывающая распространение сейсмических волн в пористых средах. Рассматривается двумерная задача, представленная системой линеаризованных динамических уравнений [29–33]. Эта система описывается в терминах векторов скорости твердой матрицы и насыщающей жидкости. Для аналитического решения применяется метод интегральных преобразований Фурье–Лапласа по времени и пространственным переменным.

Предыдущие исследования сосредотачивались на решении линеаризованных уравнений пористых сред без диссипации энергии, выраженной через скорость насыщающей жидкости, скорость матрицы, давление жидкости и тензор напряжений.

Совместно с профессором Бердышевым А.С. и Имомназаровым Х.Х. была численно решена задача с двумя слоями пористых сред, имеющих различные упругие параметры. Для этого использовался методы преобразования Лагерра по времени и метод конечных разностей по пространству [31, с.208], предложенный Г.В. Конюхом и Б.Г. Михайленко [32, с.79; 34, с.105]. Этот метод успешно применялся для решения задач теории упругости и вязкоупругости [35, с.1207] различными исследователями.

Новизна работы Применение интегрального преобразования Фурье–Лапласа по времени и одной из пространственных переменных позволило упростить исходную начально–краевую задачу для симметричной гиперболической системы уравнений в частных производных. Теперь решение сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно второй пространственной переменной.

Этот подход позволил теоретически подтвердить корректность постановки исследуемой задачи, определить необходимые и достаточные условия разрешимости задачи, получить выражение аналитического решения в явном виде.

Для численного решения дискретного аналога исходной задачи было применено несколько численных методов и использование явной конечно–разностной противопоточной схемы на разнесенной сетке позволило получить наиболее эффективный алгоритм. Разработан программный комплекс имитационной модели, описывающей физические процессы и свойства пороупругих сред с визуализацией, соответствующей экспериментальным наблюдениям. Использование алгоритма распараллеливания вычислительных процессов позволило сократить время вычислений на достаточно большой области определения пространственной переменной.

Практическая значимость исследования

В данной работе представлено краткое изложение и постановка задачи, касающейся распространения сейсмических волн в флюидонасыщенной пористой среде. Разработанная модель предоставляет объяснение для явлений, которые наблюдаются при проведении сейсмических исследований свойств горных пород в условиях наличия поровой жидкости. Учитывая сложность внутренней структуры флюидонасыщенной пороупругой среды, эта модель предоставляет возможность исследовать свойства системы в условиях, близких к реальному эксперименту, при этом снижая экономические затраты.

Применение интегрального преобразования Фурье–Лапласа к частным производным по времени и одной из пространственных переменных расширяет возможности решения задач. Таких как моделирование сейсмических и электромагнитных явлений, а также задачи теплопроводности и прочие.

Практическая значимость данного исследования обусловлена неотъемлемой потребностью в моделировании физических свойств как естественных, так и искусственных пористых материалов для точного прогнозирования и анализа динамических процессов. Пористые среды, такие как различные почвы, горные породы, ткани растений и животных, волоконные, порошковые и вспененные металлы, а также керамические, полимерные и композитные материалы, подлежат исследованию и оказывают влияние на различные области научных исследований, такие как теория фильтрации, энергетика, механика материалов, медицина, биология, сельское хозяйство и геология.

Положения, выносимые на защиту:

– Построено аналитическое решение в явном виде для двумерной динамической задачи пороупругости с помощью применения преобразование Фурье–Лапласа (спектральный метод). Подтверждена корректность постановки начально–краевой задачи для симметрической t–гиперболической системы уравнений в частных производных. На основе построенного аналитического решения выявлены необходимые и достаточные условия разрешимости системы уравнений.

– Разработан алгоритм параллельных вычислений численного решения динамической задачи пороупругости на основе явной конечноразностной противопоточной схемы на разнесенной сетке. Численное решение задачи, реализованное в программном комплексе на современном языке программирования Julia (разработан в MIT для высокопроизводительных вычислений)

– Разработан автоматизированный комплекс компьютерных программ с интерфейсом для визуализации результатов параллельных вычислительных процессов.

Автор внес значительный личный вклад в диссертационную работу, выполнив все этапы исследования самостоятельно. Совместно с научными руководителями были определены постановка задач, выбор метода исследования, а также обсуждение полученных результатов.

Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждается публикациями в высокоимпактных журналах зарубежного уровня и изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, а также участием в работе международных научных конференций.

Апробация диссертационной работы. Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались в [37, с.48-49]:

– на Международной научно–практической конференции «Российская наука в современном мире», 2018, г. Москва.

– Научной конференции Института информационных и вычислительных технологий МОН РК «Современные проблемы информатики и вычислительных технологий», 2018, г. Алматы.

– на II International Scientific and Practical Conference «Modern world economy: problems and prospects in the era of the development of digital technologies and biotechnology», 2019, г. Москва.

– на I Conference on Transfer between Mathematics & Industry (CTMI 2019), 2019, г. Сантьяго де Компостела, Испания.

– на Международной научной конференции «Inverse problems in finance, economics and life sciences», 2019, г. Алматы.

– IV международной научно–практической конференции "Информатика и прикладная математика", посвященной 70–летнему юбилею профессоров Биярова Т.Н., Вальдемара Вуйцика и 60–летию профессора Амиргалиева Е.Н., 2019, Алматы.

– в докладе на Семинаре по дифференциальным уравнениям и функциональному анализу, организованному Институтом математики в сотрудничестве с департаментом по статистике, математическому анализу и оптимизации Университета Сантьяго де Компостела, 2019, г. Сантьяго де Компостела, Испания.

– на заседаниях научного семинара Института информационных и вычислительных технологий КН МОН РК

– на научном семинаре кафедры информатики факультета информационных технологий КазНУ им.аль–Фараби.

– на научном семинаре профессора Эдрисса Тити на математическом факультете университета Texas A&M University. Профессор Эдрисс Тити также является деканом математического факультета в University of Cambridge.

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 15 печатных работ : 2 в международных научных журналах, индексированных в Scopus и Web of Science (Q1: Computer Science–miscellaneous) [38, 39], 4 в журналах из Перечня ККСОН МНиВО РК [4, 40-42] для опубликования основных результатов диссертации на соискание ученой степени PhD и 9 работ в материалах Международных научных конференций [43–50].

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников из 57 наименований и четырех приложений с кодами программного комплекса и актами внедрения; содержит 90 страниц основного компьютерного текста, включая 20 рисунков и 3 таблицы.

Во **Введении** дано описание проблемы, краткий обзор предметной области. Обоснована актуальность диссертационной работы, проведен обзор литературных источников.

Первый раздел посвящен современному состоянию постановки динамической задачи пороупругости на основе модели Доровского и рассмотрена постановка задачи для двумерного случая, которая представляет собой систему из восьми уравнений в частных производных с начальными и краевыми условиями.

Во втором разделе проводится анализ корректности постановки исходной задачи, и рассматриваются условия ее разрешимости. Дополнительно осуществляется получение аналитического решения в явном виде с использованием интегрального преобразования Фурье–Лапласа.

В третьем разделе представлен алгоритм численного решения поставленной задачи на основе конечно–разностной явной схемы на разнесенной сетке.

Четвертый раздел посвящен описанию численных экспериментов и автоматизированного комплекса компьютерных программ для визуализации полученных результатов, описывающих физические процессы, происходящие при распространении акустических волн во флюидонасыщенной пористой среде.

В заключении сформулированы полученные в работе основные результаты и их значение для области знания, в которой они относятся, а также для области их практического применения.

В приложении А приведен код на MatLab для получения аналитического решения, приведенного во втором разделе.

В приложении Б приведен код на языке программирования Julia для численного решения динамической задачи.

В приложении В приведен код на языке HTML для автоматизированного вычислительного процесса с удобным интерфейсом ввода данных и выводом на дэшборд визуализации результатов вычислений.

Хотела бы выразить благодарность в подготовке данной диссертации:

1. Отечественному научному консультанту, доктору физико–математических наук, профессору Бердышеву А.С. за постановку интересной и актуальной темы диссертации, осуществления руководства на протяжении всего периода проведения исследований, помощи в публикации результатов, включении в состав группы в научно–исследовательских проектах грантового финансирования Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.
2. Зарубежному научному консультанту, доктору философии (Ph.D), профессору А.Кабада, за помощь во время прохождения зарубежной стажировки в Университете Сантьяго де Компостела и помощь в теоретической и вычислительной части исследования, в подготовке совместных публикаций и материалов для 2–го раздела.
3. Байгерееву Д.Р., ассоциированному профессору кафедры математики Восточно–Казахстанского Университета имени С. Аманжолова, Ph.D доктору, за консультации, соавторство и помощь в подготовке материалов для совместной публикации в журнале Symmetry Open Access Journal by MDPI (Q1), ставшей основой 3–го и 4–го разделов данной диссертации.
4. Имомназарову Х.Х., д.ф–м.н, профессору, за консультации по теме диссертации, отраженных в 1–ом разделе, соавторство и ценные дополнения в публикации статьи в высокорейтинговом журнале Symmetry Open Access Journal by MDPI (Q1), ставшей основой 3–го и 4–го разделов данной диссертации.
5. Калимолдаеву М.Н., академику Национальной Академии Наук Республики Казахстан, за подбор отечественного научного консультанта и общую поддержку на протяжении всего периода обучения по программе докторантуры PhD.

1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

1.1 Постановка задачи

В данном разделе представлена формулировка математической модели [36, с.23-24]. Модель выражена в виде начально–краевой задачи для симметричной $t-$гиперболической системы уравнений в частных производных. Уравнения системы основаны на законах сохранения импульса и законе Гука, учитывая при этом термодинамические условия.

Рассматривается полуплоскость $x_2 > 0$ представляющая собой флюидонасыщенную упругую пористую среду, с учетом параметров каждой из ее компонент. Полагаем, что поры полностью заполнены жидкостью. Распределение фаз в пространстве описывается макроскопическим параметром, таким как пористость — объемная концентрация пустот, заполненных жидкостью в среде.

Распространение сейсмических волн в этой среде без потери энергии формулируется через начально–краевую задачу. В этой задаче должны быть учтены физические свойства скорость насыщающей жидкости, скорости матрицы, давление жидкости и тензор напряжений [5, 7].

Значения относящиеся к твердой фазе и подвижная фаза насыщающей жидкости упругой среды обозначаются нижним индексами «s» и «l», соответственно. Например, парциальная плотность ρ_s и ρ_l, физические плотности ρ_s^f и ρ_l^f. Парциальные плотности определяются через физические плотности и пористости d_0:

$$\rho_0 = \rho_s^f(1-d_0) + \rho_l^f d_0 = \rho_s + \rho_l,$$

здесь ρ_0 - плотность пористой среды

Теперь перейдем к построению самой задачи. Сперва задача рассматривается в области $t \in [0;+\infty)$, $x_1 \in (-\infty;+\infty)$, $x_2 \in [0;+\infty)$. Необходимо учитывать следующие математические модели физических процессов:

Закон сохранения импульса для жесткого каркаса:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s}\left(\frac{\partial \sigma_{j1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{j2}}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_j} = F_j, \tag{1.1.1}$$

где $j = 1,2$, то есть $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$ вектор скорости упругого пористого тела, p – поровое давление, σ_{ik} – компонент тензора напряжений, F_j – компоненты функции источника;

Уравнение движения насыщающей жидкости является линеаризованном случае предыдущего:

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_j} = F_j, \qquad (1.1.2)$$

где $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ – вектор скорости жидкости;

Закон Гука для жесткого каркаса (упругой среды):

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\rho_s}{\rho_0}K - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{jk} div\vec{u} - \frac{\rho_s}{\rho_0}K\delta_{jk} div\vec{v} = 0, \qquad (1.1.3)$$

где $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$ $\lambda > 0,$ $\mu > 0$ – коэффициенты Ламе.

А для насыщающей жидкости является линеаризованном случае предыдущего:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \left(K - \frac{\rho_s}{\rho_0}\alpha\right) div\vec{u} + \frac{\rho_l}{\rho_0}\alpha div\vec{v} = 0 \qquad (1.1.4)$$

где $\alpha = \gamma + K,$ – сумма двух модулей объемного сжатия твердой K и жидкой γ компонент гетерофазной среды, которые характеризуют двухфазную пористую среду.

Начальные условия:

$$u_j\Big|_{t=0} = v_j\Big|_{t=0} = \sigma_{jk}\Big|_{t=0} = p\Big|_{t=o} = 0, \qquad (1.1.5)$$

Граничные условия на свободной поверхности плоскости:

$$\sigma_{22} + p\Big|_{x_2=0} = \sigma_{12}\Big|_{x_2=0} = \frac{\rho_l}{\rho_0}p\Big|_{x_2=0} = 0, \qquad (1.1.6)$$

Упругие модули $K > 0,\ \mu > 0,\ \gamma > 0\ (K, \mu, \gamma \in \mathbb{R})$ выражаются через скорости распространения поперечной волны c_s и двух скоростей продольных волн c_{p1}, c_{p2} следующими формулами:

$$\mu = \rho_s c_s^2,$$

$$K = \frac{\rho_0}{2}\frac{\rho_s}{\rho_l}\left(c_{p1}^2 + c_{p2}^2 - \frac{8}{3}\frac{\rho_l}{\rho_0}c_s^2 - \sqrt{(c_{p1}^2 - c_{p2}^2)^2 - \frac{64}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho_0^2}c_s^4}\right),$$

$$\gamma = \frac{\rho_0}{2}\left(c_{p1}^2 + c_{p2}^2 - \frac{8}{3}\frac{\rho_s}{\rho_0}c_s^2 + \sqrt{(c_{p1}^2 - c_{p2}^2)^2 - \frac{64}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho_0^2}c_s^4}\right).$$

1.2 Модель для двумерного случая

Для двумерного случая [37, с.25-27] индексы *j и k* принимают значения только 1,2. Тогда система (1.1) – (1.4) будет состоять из восьми уравнений с восемью неизвестными функциями $u_1, u_2, v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, p$:

$$(j=1,\ k=1,2)\ \frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_1}=F_1, \tag{1.2.1}$$

$$(j=2,\ k=1,2)\ \frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_2}=F_2, \tag{1.2.2}$$

$$(j=1)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_1}=F_1, \tag{1.2.3}$$

$$(j=2)\qquad \frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_2}=F_2, \tag{1.2.4}$$

$$(j=1,\ k=1)\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t}+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\frac{\rho_s}{\rho_0}K-\frac{2}{3}\mu)(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2})-\frac{\rho_s}{\rho_0}K(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2})=0, \tag{1.2.5}$$

$$(j=1,\ k=2)\ (j=2,\ k=1)\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial t}+\mu(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1})=0, \tag{1.2.6}$$

$$(j=2,\ k=2)\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t}+2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+(\frac{\rho_s}{\rho_0}K-\frac{2}{3}\mu)(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2})-\frac{\rho_s}{\rho_0}K(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2})=0, \tag{1.2.7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}-(K-\frac{\rho_s}{\rho_0}\alpha)(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2})+\frac{\rho_l}{\rho_0}\alpha(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2})=0, \tag{1.2.8}$$

Начальные условия (1.1.5) сохраняют следующий вид:

$$u_j\big|_{t=0}=v_j\big|_{t=0}=\sigma_{jk}\big|_{t=0}=p\big|_{t=o}=0, \tag{1.2.9}$$

Граничные условия (1.1.6) только для пористого слоя, насыщенного жидкостью с плотностью $\rho_l>0$ принимают следующий вид:

$$\sigma_{22}\big|_{x_2=0}=\sigma_{12}\big|_{x_2=0}=p\big|_{x_2=0}=0. \tag{1.2.10}$$

где в качестве компонент функции источника сигнала $F_1(t,x_1,x_2)$, $F_2(t,x_1,x_2)$ в правой стороне системы рассмотрим функции следующего вида, имеющие физический смысл:

$$F_1(t,x_1,x_2) = f(t)\frac{\partial\delta\left(x_1-x_1^0\right)}{\partial x_1}\delta\left(x_2-x_2^0\right),$$
$$F_2(t,x_1,x_2) = f(t)\delta\left(x_1-x_1^0\right)\frac{\partial\delta\left(x_2-x_2^0\right)}{\partial x_2}, \quad (1.2.11)$$

где в качестве моделей сейсмических импульсов, используемых в сейсморазведке для теоретических исследований и численных экспериментов, мы рассмотрим два случая функции $f(t)$ следующего вида:

Случай 1 $$f(t) = -2\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2} \quad (1.2.12)$$

Случай 2 Импульс Пузырева $$f(t) = e^{-\frac{\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}{\gamma^2}}\sin(2\pi f_0\cdot(t-t_0)). \quad (1.2.13)$$

Выводы по первому разделу

В данном разделе приведена постановка динамической задачи пороупругости, описывающая распространение сейсмических волн в двухфазной пористой среде, насыщенной жидкостью. В общем случае, математическая модель составлена на полуплоскости по первой пространственной переменной в полном соответствии с физическими законами термодинамики и представляет собой четыре уравнения, два из которых составлены на основе законов сохранения импульса:

– первое для твердого каркаса пористой среды;

– второе для насыщающей жидкости;

и еще два на основе закона (упругости) Гука:

– третье для твердого каркаса пористой среды;

– четвертое для насыщающей жидкости.

В двумерном случае рассматриваемая задача представляет собой математическую модель в виде задачи для системы из восьми дифференциальных уравнений в частных производных. Приведен вид функции источника сейсмического импульса, имеющих физический смысл, двух видов. Далее для этих случаев будут проведены исследования аналитического решения во втором разделе, с также эти функции будут использованы для численного решения в третьем разделе и численных экспериментов в четвертом разделе.

2 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

2.1 Получение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Для дальнейшего исследования численно–аналитического решения поставленной задачи (1.2.1) – (1.2.10) приведем определение корректности постановки задачи из [51].

Определение Задача называется корректной, если она разрешима при любых начальных условиях (или граничных) данных, принадлежащих к некоторому классу, имеет единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных.

Обоснование корректности задачи (1.2.1) – (1.2.10) сформулировано в виде Теоремы 1, приведенной в конце второго раздела диссертации.

Для демонстрации корректности постановки задачи приведем уравнения (1.2.1) – (1.2.10) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого воспользуемся интегральным преобразованием Фурье–Лапласа [52] по t, x_1 [37, с.25-26]:

$$\hat{f}(s,k_1,x_2)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x_1,x_2)e^{-st-ik_1x_1}dx_1dt\,, \tag{2.1.0}$$

где $f(t,x_1,x_2)$ – интегрируемая функция при не отрицательных t и для любого x_1, i –мнимая единица.

Таким образом, все частные производные по x_1 примут вид функции с параметрами s и k_1, умноженный на соответствующий коэффициент ik_1. Например, для σ_{11}:

$$\frac{\hat{\partial}\sigma_{11}(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\sigma_{11}(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}e^{-st-ik_1x_1}dx_1dt=\int_0^{\infty}e^{-st}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik_1x_1}d\sigma_{11}(t,x_1,x_2)dx_1dt=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-st}\left[e^{-ik_1x_1}\sigma_{11}(t,x_1,x_2)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{11}(t,x_1,x_2)(-ik_1)e^{-ik_1x_1}dx_1\right]dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{при}\\ \textit{условии}:\\ \lim\limits_{x_1\to\infty}\sigma_{11}(t,x_1,x_2)=0\\ \lim\limits_{x_1\to-\infty}\sigma_{11}(t,x_1,x_2)=0\end{array}\right|=ik_1\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{11}(t,x_1,x_2)e^{-st-ik_1x}dx_1dt=ik_1\hat{\sigma}_{11}(s,k_1,x_2)$$

Аналогично можно вычислить следующие:

$$\frac{\hat{\partial}u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}=ik_1\hat{u}_1(s,k_1,x_2),\ \frac{\hat{\partial}u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}=ik_1\hat{u}_2(s,k_1,x_2),\ \frac{\hat{\partial}v_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}=ik_1\hat{v}_1(s,k_1,x_2),$$

$$\frac{\hat{\partial}v_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}=ik_1\hat{v}_2(s,k_1,x_2),\ \frac{\hat{\partial}\sigma_{12}(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}=ik_1\hat{\sigma}_{12}(s,k_1,x_2),\ \frac{\hat{\partial}\sigma_{22}(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}=ik_1\hat{\sigma}_{22}(s,k_1,x_2),$$

$$\frac{\hat{\partial}p\,(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}=ik_1\hat{p}\,(s,k_1,x_2)$$

А частные производные по t учитывая начальную условию (1.2.9) примут вид функции с параметрами s и k_1 и умноженный на S. Например, для $v_1(t,x_1,x_2)$:

$$\frac{\hat{\partial} v_1(t,x_1,x_2)}{\partial t}=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial v_1(t,x_1,x_2)}{\partial t}e^{-st-ik_1x_1}dx_1dt=\int_{-\infty}^\infty e^{-ik_1x_1}\int_0^\infty e^{-st}dv_1(t,x_1,x_2)dtdx_1=$$

$$=\int_0^\infty e^{-ik_1x_1}\left[e^{-st}v_1(t,x_1,x_2)\Big|_0^\infty-\int_{-\infty}^\infty v_1(t,x_1,x_2)(-s)e^{-st}dt\right]dx_1=$$

$$=\left|\begin{array}{l} \text{условие}: \\ \lim\limits_{t\to\infty} v_1(t,x_1,x_2)\le C \\ (9')\Rightarrow v_1(0,x_1,x_2)=0\end{array}\right|=s\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty v_1(t,x_1,x_2)e^{-st-ik_1x}dx_1dt=s\hat{v}_1(s,k_1,x_2)$$

Нетрудно вычислить для остальных:

$$\frac{\hat{\partial} u_1(t,x_1,x_2)}{\partial t}=s\hat{u}_1(s,k_1,x_2),\ \frac{\hat{\partial} u_2(t,x_1,x_2)}{\partial t}=s\hat{u}_2(s,k_1,x_2),\ \frac{\hat{\partial} v_2(t,x_1,x_2)}{\partial t}=s\hat{v}_2(s,k_1,x_2),$$

$$\frac{\hat{\partial} \sigma_{11}(t,x_1,x_2)}{\partial t}=s\hat{\sigma}_{11}(s,k_1,x_2),\ \frac{\hat{\partial} \sigma_{12}(t,x_1,x_2)}{\partial t}=s\hat{\sigma}_{12}(s,k_1,x_2),\ \frac{\hat{\partial} \sigma_{22}(t,x_1,x_2)}{\partial t}=s\hat{\sigma}_{22}(s,k_1,x_2),$$

$$\frac{\hat{\partial} p(t,x_1,x_2)}{\partial t}=s\hat{p}(s,k_1,x_2).$$

Уравнение (1.2.3), превращается в:

$$s\hat{v}_1+\frac{1}{\rho_0}ik_1\hat{p}=\hat{F}_1 \tag{2.1.1}$$

Из (2.1.1) нетрудно получить следующее:

$$\hat{v}_1=-\frac{1}{s}(\hat{F}_1-\frac{ik_1}{\rho_0}\hat{p}) \tag{2.1.2}$$

Следующую систему, состоящую из 7 обыкновенных дифференциальных уравнении получаем из (1.2.1) – (1.2.8) с учетом преобразования, а также (2.1.2)::

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\hat{\sigma}_{12}}{\partial x_2}+s\hat{u}_1+\frac{ik_1}{\rho_s}\hat{\sigma}_{11}+\frac{ik_1}{\rho_0}\hat{p}=\hat{F}_1 \tag{2.1.3}$$

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\hat{\sigma}_{22}}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\hat{p}}{\partial x_2}+s\hat{u}_2+\frac{ik_1}{\rho_s}\hat{\sigma}_{21}=\hat{F}_2 \tag{2.1.4}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\hat{p}}{\partial x_2}+s\hat{v}_2=\hat{F}_2 \tag{2.1.5}$$

$$(\frac{\rho_s K}{\rho_0}-\frac{2}{3}\mu)\frac{\partial\hat{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\rho_s K}{\rho_0}\frac{\partial\hat{v}_2}{\partial x_2}+(\frac{\rho_s K}{\rho_0}+\frac{4}{3}\mu)ik_1\hat{u}_1+s\hat{\sigma}_{11}-\frac{\rho_s Kk_1^2}{s{\rho_0}^2}\hat{p}=\frac{\rho_s Kik_1}{s\rho_0}\hat{F}_1 \tag{2.1.6}$$

$$\mu\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial x_2}+\mu ik_1\hat{u}_2+s\hat{\sigma}_{12}=0 \tag{2.1.7}$$

$$(\frac{\rho_s K}{\rho_0}+\frac{4}{3}\mu)\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\rho_s K}{\rho_0}\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_2}+(\frac{\rho_s}{\rho_0}K-\frac{2}{3}\mu)ik_1\hat{u}_1+s\hat{\sigma}_{22}-\frac{\rho_s K k_1^2}{s\rho_0^2}\hat{p}=\frac{\rho_s Kik_1}{s\rho_0}\hat{F}_1 \tag{2.1.8}$$

$$(K-\frac{\alpha\rho_s}{\rho_0})\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\alpha\rho_l}{\rho_0}\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_2}+(K-\alpha\frac{\rho_s}{\rho_0})ik_1\hat{u}_1-(\frac{\alpha\rho_l k_1^2}{s\rho_0}+s)\hat{p}=\frac{\alpha\rho_l ik_1}{s\rho_0}\hat{F}_1 \tag{2.1.9}$$

С условиями (1.2.10):

$$\hat{\sigma}_{22}\big|_{x_2=0}=\hat{\sigma}_{12}\big|_{x_2=0}=\hat{p}\big|_{x_2=0}=0 \tag{2.1.10}$$

Уравнение (2.1.3) умножим на $(-\frac{\rho_s}{ik_1})$ и уравнение (2.1.6) умножим на $\frac{1}{s}$ и получим:

$$\begin{cases}(-\frac{1}{ik_1})\frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial x_2}+(-\frac{s\rho_s}{ik_1})\hat{u}_1-\hat{\sigma}_{11}-\frac{\rho_s}{\rho_0}\hat{p}=(-\frac{\rho_s}{ik_1})\hat{F}_1 & (2.1.11)\\ (\frac{\rho_s K}{\rho_0}-\frac{2}{3}\mu)\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\rho_s}{\rho_0}\frac{K}{s}\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_2}+(\frac{\rho_s K}{\rho_0}+\frac{4}{3}\mu)\frac{ik_1}{s}\hat{u}_1+\hat{\sigma}_{11}-\frac{\rho_s K k_1^2}{s^2\rho_0^2}\hat{p}=\frac{\rho_s Kik_1}{s^2\rho_0}\hat{F} & (2.1.12)\end{cases}$$

Далее сложив два преобразованных уравнения между собой, т.е. (2.1.11) + (2.1.12), получим одно уравнение (2.1.16), не содержащее $\hat{\sigma}_{11}$. Таким образом, если будут определены функции $\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{v}_2,\hat{\sigma}_{12},\hat{\sigma}_{22},\hat{p}$, то неизвестные функции $\hat{v}_1$ и $\hat{\sigma}_{11}$ определяются соответственно равенствами (2.1.2) и (2.1.3).

Благодаря этим действиям мы получили новую систему из шести уравнений с шестью неизвестными функциями. Для удобства для шести неизвестных функции введем в рассмотрение вектор–функцию

$$\hat{w}=\hat{w}\,(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{v}_2,\hat{\sigma}_{12},\hat{\sigma}_{22},\hat{p})^T$$

Также для удобства, поменяем порядок уравнении в системе следующим образом (2.1.7) $\to$(2.1.13), (2.1.8) $\to$(2.1.14), (2.1.9) $\to$(2.1.15), (2.1.3)$\times(-\frac{\rho_s}{ik_1})$ +(2.1.6) $\times\frac{1}{s}$ $\to$(2.1.16), (2.1.4) $\to$(2.1.17), (2.1.5) $\to$(2.1.18):

$$\mu\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2}+\mu ik_1\hat{u}_2+s\hat{\sigma}_{21}=0 \tag{2.1.13}$$

$$(\frac{\rho_s K}{\rho_0}+\frac{4}{3}\mu)\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\rho_s K}{\rho_0}\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_2}+(\frac{\rho_s K}{\rho_0}-\frac{2}{3}\mu)ik_1\hat{u}_1+s\hat{\sigma}_{22}-\frac{\rho_s K k_1^2}{s\rho_0^2}\hat{p}=\frac{\rho_s Kik_1}{s\rho_0}\hat{F}_1, \tag{2.1.14}$$

$$(K-\frac{\alpha\rho_s}{\rho_0})\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\alpha\rho_l}{\rho_0}\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_2}+(K-\frac{\alpha\rho_s}{\rho_0})ik_1\hat{u}_1-(\frac{\alpha\rho_l k_1^2}{s\rho_0^2}+s)\hat{p}=\frac{\alpha\rho_l ik_1}{s\rho_0}\hat{F}_1, \tag{2.1.15}$$

$$(\frac{\rho_s K}{\rho_0}-\frac{2}{3}\mu)\frac{1}{s}\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\rho_s K}{s\rho_0}\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x_2}-\frac{1}{ik_1}\frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial x_2}+(\frac{\rho_s K}{\rho_0}+\frac{4}{3}\mu+\frac{s^2\rho_s}{k_1^2})\frac{ik_1}{s}\hat{u}_1- \\ -(1+\frac{Kk_1^2}{s^2\rho_0})\frac{\rho_s}{\rho_0}\hat{p}=(\frac{Kik_1}{s^2}-\frac{\rho_0}{ik_1})\frac{\rho_s}{\rho_0}\hat{F}_1 \quad (2.1.16)$$

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_2}+s\hat{u}_2+\frac{ik_1}{\rho_s}\hat{\sigma}_{21}=\hat{F}_2 \quad (2.1.17)$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_2}+s\hat{v}_2=\hat{F}_2, \quad (2.1.18)$$

С граничными условиями:

$$\hat{\sigma}_{22}\big|_{x_2=0}=\hat{\sigma}_{12}\big|_{x_2=0}=\hat{p}\big|_{x_2=0}=0 \quad (2.1.19)$$

2.2 Приведение системы к нормальному (каноническому) виду

Представим систему (2.1.13) – (2.1.18) в более удобном матричном виде, следующем образом:

$$A\frac{d\hat{w}}{dx_2}+B\hat{w}=C, \quad (2.2.1)$$

где $\hat{w}$ – вектор $\hat{w}=\hat{w}\,(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{v}_2,\hat{\sigma}_{12},\hat{\sigma}_{22},\hat{p})$.

В рассматриваемой системе, матрицы A, B, C имеют следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_s K}{\rho_0}+\frac{4}{3}\mu & -\frac{\rho_s K}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K-\frac{\alpha\rho_s}{\rho_0} & -\frac{\alpha\rho_l}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\rho_s K}{\rho_0}-\frac{2}{3}\mu)\frac{1}{s} & -\frac{\rho_s K}{s\rho_0} & -\frac{1}{ik_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_s} & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \mu ik_1 & 0 & s & 0 & 0 \\ (\frac{\rho_s K}{\rho_0}-\frac{2}{3}\mu)ik_1 & 0 & 0 & 0 & s & -\frac{\rho_s Kk_1^2}{s\rho_0{}^2} \\ (K-\frac{\alpha\rho_s}{\rho_0})ik_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha\rho_l k_1^2}{s\rho_0}-s \\ (\frac{\rho_s K}{\rho_0}+\frac{4}{3}\mu+\frac{s^2\rho_s}{k_1^2})\frac{ik_1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_s}{\rho_0}(\frac{Kk_1^2}{s^2\rho_0}+1) \\ 0 & s & 0 & \frac{ik_1}{\rho_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho_s Kik_1}{s\rho_0}\hat{F}_1 \\ \frac{\alpha\rho_l ik_1}{s\rho_0}\hat{F}_1 \\ (\frac{Kik_1}{s^2}-\frac{\rho_0}{ik_1})\frac{\rho_s}{\rho_0}\hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{F}_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (2.2.1) можно записать виде:

$$\frac{d\hat{w}}{dx_2}+B_1\hat{w}=C_1, \tag{2.2.2}$$

где $B_1=A^{-1}B$ и $C_1=A^{-1}C$. (2.2.2) называется нормальным или каноническим видом. Если ***detA* ≠ 0,** то неоднородная система (2.2.2) является разрешимой.

Обратная матрица $(A)^{-1}$ вычислена с использованием пакета MatLab в символьном виде и имеет следующий вид:

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3\alpha\rho_0\rho_l}{T} & -\frac{3K\rho_0\rho_s}{T} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3\rho_0(K\rho_0-\alpha\rho_s)}{T} & -\frac{\rho_0(3K\rho_s+4\mu\rho_0)}{T} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{k_1(T+2\alpha\mu\rho_0\rho_l)\mathrm{i}}{sT} & \frac{6Kk_1\mu\rho_0\rho_s\mathrm{i}}{sT} & -k_1\mathrm{i} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \rho_s & -\rho_s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_0
\end{pmatrix},
$$

где для упрощения выражений приняты следующее обозначение:

$$
T = -3\rho_0 K^2 \rho_s + 3\alpha K \rho_s^2 + 3\alpha\rho_l K\rho_s + 4\alpha\mu\rho_0\rho_l
$$

Следовательно, матрица $B_1 = (A)^{-1}B$ принимает следующий вид:

$$
B_1 = (A)^{-1}B = \begin{pmatrix}
0 & k_1\mathrm{i} & 0 & \frac{s}{\mu} & 0 & 0 \\
-\frac{3Kk_1\rho_0\rho_s T_2}{T} - \frac{3\alpha k_1\rho_0\rho_l T_7}{T} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\alpha\rho_0\rho_l s}{T} & -\frac{3K\rho_0\rho_s T_1}{T} - \frac{3K\alpha k_1^2\rho_l\rho_s}{\rho_0 sT} \\
-\frac{3k_1\rho_0 T_7 T_3}{T} - \frac{k_1\rho_0 T_2 T_4}{T} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\rho_0 s T_3}{T} & -\frac{\rho_0 T_1 T_4}{T} - \frac{3Kk_1^2\rho_s T_3}{\rho_0 sT} \\
-\frac{k_1^2\left(\frac{4\mu\mathrm{i}}{3} + \frac{\rho_s s^2\mathrm{i}}{k_1^2} + \frac{K\rho_s\mathrm{i}}{\rho_0}\right)\mathrm{i}}{s} - \frac{k_1^2 T_7 T_6\mathrm{i}}{sT} + \frac{6Kk_1^2\mu\rho_0\rho_s T_2\mathrm{i}}{sT} & 0 & 0 & 0 & \frac{k_1 T_6 i}{T} & \frac{k_1\rho_s\left(\frac{Kk_1^2}{\rho_0 s^2}+1\right)i}{\rho_0} - \frac{Kk_1^3\rho_s T_6 i}{\rho_0^2 s^2 T} + \frac{6Kk_1\mu\rho_0\rho_s T_1 i}{sT} \\
0 & \rho_s s & -\rho_s s & k_1\mathrm{i} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho_0 s & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

где

$$
T_1 = s - \frac{\alpha k_1^2\rho_l}{\rho_0 s} \qquad T_3 = K\rho_0 - \alpha\rho_s \qquad T_5 = -3\rho_0 K^2\rho_s + 3\alpha K\rho_s^2 + 3\alpha\rho_l K\rho_s + 4\alpha\mu\rho_0\rho_l
$$

$$
T_2 = K\mathrm{i} - \frac{\alpha\rho_s\mathrm{i}}{\rho_0} \qquad T_4 = 3K\rho_s + 4\mu\rho_0 \qquad T_6 = T_5 + 2\alpha\mu\rho_0\rho_l
$$

$$
T_7 = \frac{2\mu\mathrm{i}}{3} - \frac{K\rho_s\mathrm{i}}{\rho_0}
$$

Более того можно показать, что вектор правой стороны системы $C_1 = (A)^{-1}C$ принимает следующий вид:

$$C_1=(A)^{-1}C=\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\alpha\rho_0\rho_l}{T} & -\frac{3K\rho_0\rho_s}{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\rho_0(K\rho_0-\alpha\rho_s)}{T} & -\frac{\rho_0(3K\rho_s+4\mu\rho_0)}{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_1(T+2\alpha\mu\rho_0\rho_l)\mathrm{i}}{sT} & \frac{6Kk_1\mu\rho_0\rho_s\mathrm{i}}{sT} & -k_1\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_s & -\rho_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}\frac{Kik_1}{s}\hat{F}_1 \\ \frac{\alpha}{s}\rho_0\rho_{0,l}ik_1\hat{F}_1 \\ (\frac{\rho_{0,s}}{s^2\rho_0}Kik_1+\frac{i\rho_{0,s}}{k_1})\hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{F}_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\hat{F}_1\alpha k_1\rho_l(3K\rho_s+4\mu\rho_0)\mathrm{i}}{s\sigma_1}+\frac{3\hat{F}_1Kk_1\rho_s(K\rho_0-\alpha\rho_s)\mathrm{i}}{s\sigma_1} \\ -\frac{\hat{F}_1Kk_1^2\rho_s(T+2\alpha\mu\rho_0\rho_l)}{\rho_0 s^2\sigma_1}-\frac{6\hat{F}_1K\alpha k_1^2\mu\rho_l\rho_s}{s^2\sigma_1}-\frac{\hat{F}_1k_1\rho_s\left(\frac{\rho_0\mathrm{i}}{k_1}+\frac{Kk_1\mathrm{i}}{s^2}\right)\mathrm{i}}{\rho_0} \\ 0 \\ \hat{F}_2\rho_0 \end{pmatrix}$$

Далее уравнение (2.2.1) можно записать в следующей компактной векторной форме:

$$\frac{d\hat{w}}{dx_2}=\sum_{i=1}^{6}b_{ki}\hat{w}_i+B_2 \qquad (2.2.3)$$

где *k=1, 2,…, 6,* $\hat{w}=\hat{w}\,(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{v}_2,\hat{\sigma}_{12},\hat{\sigma}_{22},\hat{p})^T$ это вектор с компонентами функций $\hat{w}_1=\hat{u}_1,\hat{w}_2=\hat{u}_2,\hat{w}_3=\hat{v}_2,\hat{w}_4=\hat{\sigma}_{12},\hat{w}_5=\hat{\sigma}_{22},\hat{w}_5=\hat{p}$,

Для получения собственных значении и соответствующих к ним собственных векторов для матрицы B_1 воспользуемся готовым пакетом решении MatLab. Мы видим, что спектр матрицы B_1 состоит из трех пар взаимопротивоположных значений:

$$\tau=\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\\ \tau_4\\ \tau_5\\ \tau_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\\ -\tau_1\\ -\tau_2\\ -\tau_3\end{pmatrix},$$

где

$$\tau_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\phi_3}{\phi_2}-\phi_2-\phi_1+\frac{2\phi_9}{\phi_7}},$$

$$\tau_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\phi_3}{\phi_2}-\phi_2+\phi_1+\frac{2\phi_9}{\phi_7}},$$

$$\tau_3=\sqrt{\phi_2-\frac{\phi_3}{\phi_2}+\frac{\phi_9}{\phi_7}},$$

$$\phi_1=\sqrt{3}\left(\frac{\phi_3\,\mathrm{i}}{\phi_2}+\phi_2\,\mathrm{i}\right),$$

$$\phi_2=\left(\sqrt{\left(\phi_6-\phi_4+\phi_5\right)^2+\phi_3^{\ 3}}+\phi_6-\phi_4+\phi_5\right)^{1/3},$$

$$\phi_3=\frac{\phi_8}{\phi_7}-\frac{\phi_9^{\ 2}}{9k_1^{\ 4}\mu^2\phi_{10}^{\ 2}},$$

$$\phi_4=\frac{\phi_9\,\phi_8}{6k_1^{\ 4}\mu^2\phi_{10}^{\ 2}},$$

$$\phi_5=\frac{\rho_0\left(\mu k_1^{\ 2}+\rho_{0,s}\,s^2\right)}{2k_1^{\ 2}\,\mu\phi_{10}}\big(-3K^2k_1^{\ 4}\rho_{0,s}+3\alpha\rho_0\,K k_1^{\ 4}\rho_{0,s}^{\ 2}+3\alpha\rho_{0,l}\,K k_1^{\ 4}\rho_{0,s}+4\alpha\mu\rho_0\,\rho_{0,l}\,k_1^{\ 4}+$$
$$+3\alpha\rho_0\,k_1^{\ 2}\rho_{0,s}^{\ 2}s^2+3\alpha\rho_0\,\rho_{0,l}\,k_1^{\ 2}\rho_{0,s}\,s^2+4\mu\rho_0\,k_1^{\ 2}s^2+3\rho_0\,\rho_{0,s}\,s^4)$$

$$\phi_6=\frac{\phi_9^{\ 3}}{27k_1^{\ 6}\mu^3\phi_{10}^{\ 3}}$$

$$\phi_7=3k_1^{\ 2}\mu\phi_{10}$$

$$\phi_8=-3K^2\rho_{0,s}+3\alpha K\rho_0\,\rho_{0,s}^{\ 2}+3\alpha\rho_{0,l}\,K\rho_0\,\rho_{0,s}+4\alpha\mu\rho_{0,l}\,\rho_0^{\ 2}$$

$$\begin{aligned}\phi_9=&-3K^2k_1^{\ 4}\mu\rho_0\,\rho_{0,s}+\phi_{12}-9K^2k_1^{\ 2}\mu\rho_{0,s}-3K^2\rho_{0,s}^{\ 2}s^2+3\alpha K k_1^{\ 4}\mu\rho_0^{\ 2}\rho_{0,s}^{\ 2}-\phi_{11}+9\alpha K k_1^{\ 2}\mu\rho_0\,\rho_{0,s}^{\ 2}+\\&+9\alpha\rho_{0,l}\,K k_1^{\ 2}\mu\rho_0\,\rho_{0,s}+3\alpha K\rho_0\,\rho_{0,s}^{\ 3}s^2+3\alpha\rho_{0,l}\,K\rho_0\,\rho_{0,s}^{\ 2}s^2+6\alpha\rho_{0,l}\,k_1^{\ 4}\mu^2\rho_0^{\ 2}+4k_1^{\ 2}\mu^2\rho_0^{\ 2}s^2+\\&+6\alpha\rho_{0,l}\,k_1^{\ 2}\mu^2\rho_0^{\ 2}+3\alpha k_1^{\ 2}\mu\rho_0^{\ 2}\rho_{0,s}^{\ 2}s^2+3\alpha\rho_{0,l}\,k_1^{\ 2}\mu\rho_0^{\ 2}\rho_{0,s}\,s^2+4\alpha\rho_{0,l}\,\mu\rho_0^{\ 2}\rho_{0,s}\,s^2\end{aligned}$$

$$\phi_{10}=-3K^2\rho_{0,s}+3\alpha K\rho_0\,\rho_{0,s}^{\ 2}+3\alpha\rho_{0,l}\,K\rho_0\,\rho_{0,s}+4\alpha\mu\rho_{0,l}\,\rho_0^{\ 2}$$

$$\phi_{11}=3\alpha K k_1^{\ 4}\mu\rho_0\,\rho_{0,s}^{\ 2}$$

$$\phi_{12}=3K^2k_1^{\ 4}\mu\rho_{0,s}$$

Мы полагаем, что параметры $K, \alpha, \mu, \rho_0, \rho_l, \rho_s$ таковы, что мы имеем 6 различных по значению собственных значений, т.е. общее решение однородной системы имеет следующий вид:

$$\hat{w}(x_2) = e^{B_1 x_2} C = P e^{J x_2} P^{-1} C,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_3 \end{pmatrix},$$

$B_1 z_k = \tau_k z_k,\ k = 1, \ldots, 6,$ $C = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\ T \in M_{6\times 1}(\mathbb{C})$ эти равенства выполняются для $P = (z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_5 \mid z_6) \in M_{6\times 6}(\mathbb{C})$ матриц собственных векторов.

Поскольку значения элементов собственных векторов в матрице P являются слишком громоздкими в Приложении А был представлен код MATLAB.

Частное решение для уравнения (2.2.2):

$$\psi(x_2) = \int_0^{x_2} e^{B_1(x_2-l)} B_2(l)\,dl = \int_0^{x_2} P e^{J(x_2-l)} P^{-1} B_2(l)\,dl = P \int_0^{x_2} e^{J(x_2-l)} P^{-1} B_2(l)\,dl.$$

Общее решение для уравнения (2.2.2) форму:

$$\hat{w}(x_2) = P e^{J x_2} P^{-1} C + P \int_0^{x_2} e^{J(x_2-l)} P^{-1} B_2(l)\,dl = P\left[e^{J x_2} P^{-1} C + \int_0^{x_2} e^{J(x_2-l)} P^{-1} B_2(l)\,dl \right]. \quad (2.2.4)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$P^{-1} = (p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 \mid p_6) \in M_{6\times 6}(\mathbb{C}),$$
$$\tilde{C} = (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, \tilde{C}_5, \tilde{C}_6)^T = P^{-1} C$$
$$\tilde{B}_2 = (\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4, \tilde{\zeta}_5, \tilde{\zeta}_6)^T = P^{-1} B_2.$$
$$\tilde{\zeta}_j = (i p_{j3} d_3 + p_{j4} \rho_s) \hat{F}_1 + p_{j6} \rho_0 \hat{F}_2, \quad j \in \{1, \ldots, 6\}. \quad (2.2.5)$$

Тогда общее решение (2.2.4) можно переписать в следующем виде:

$$\hat{w}(x_2) = P\left[\mathrm{e}^{Jx_2}\tilde{C} + \int_0^{x_2} \mathrm{e}^{J(x_2-l)}\tilde{B}_2(l)dl\right],$$

или

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{22} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \left(z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_5 | z_6\right) \begin{pmatrix} e^{\tau_1 x_2}(\tilde{C}_1 + \int_0^{x_2} \tilde{\zeta}_1(l)e^{-\tau_1 l}dl \\ e^{\tau_2 x_2}(\tilde{C}_2 + \int_0^{x_2} \tilde{\zeta}_2(l)e^{-\tau_2 l}dl \\ e^{\tau_3 x_2}(\tilde{C}_3 + \int_0^{x_2} \tilde{\zeta}_3(l)e^{-\tau_3 l}dl \\ e^{-\tau_1 x_2}(\tilde{C}_4 + \int_0^{x_2} \tilde{\zeta}_4(l)e^{\tau_1 l}dl \\ e^{-\tau_2 x_2}(\tilde{C}_5 + \int_0^{x_2} \tilde{\zeta}_5(l)e^{\tau_2 l}dl \\ e^{-\tau_3 x_2}(\tilde{C}_6 + \int_0^{x_2} \tilde{\zeta}_6(l)e^{\tau_3 l}dl \end{pmatrix} \tag{2.2.6}$$

Компоненты можно записать как:

$$\hat{w}_m(x_2) = \sum_{k=1}^{3} z_{mk}\mathrm{e}^{\tau_k x_2}\left(\sum_{j=1}^{6} p_{kj}C_j + \left(ip_{k3}d_3 + p_{k4}\rho_s\right)\int_0^{x_2}\mathrm{e}^{-\tau_k l}\hat{F}_1(l)dl + p_{k6}\rho_0\int_0^{x_2}\mathrm{e}^{-\tau_k l}\hat{F}_2(l)dl\right) +$$
$$+\sum_{k=4}^{6} z_{mk}\mathrm{e}^{-\tau_{k-3}x_2}\left(\sum_{j=1}^{6} p_{kj}C_j + \left(ip_{k3}d_3 + p_{k4}\rho_s\right)\int_0^{x_2}\mathrm{e}^{\tau_{k-3} l}\hat{F}_1(l)dl + p_{k6}\rho_0\int_0^{x_2}\mathrm{e}^{\tau_{k-3} l}\hat{F}_2(l)dl\right), \quad m = 1,\ldots,6$$

2.3 Условия разрешимости

Далее, как изложено в работе [37, с.32-34] с учетом граничных условий (1.2.10), из (2.2.4) при x_2 равным нулю, для всех $j = 4, 5, 6$ будет $C_j = 0$. А для случая при $j = 1, 2, 3$ значений констант C_j определяется физическим смыслом для граничных условия. То есть при бесконечности скорости угасают до нуля:

$$\lim_{x_2\to\infty}\hat{u}_1 = 0, \lim_{x_2\to\infty}\hat{u}_2 = 0, \lim_{x_2\to\infty}\hat{v}_2 = 0. \tag{2.3.1}$$

Для дальнейших исследований мы рассматриваем случаи, когда собственные значения матрицы B_1 все различны и имеет ненулевую действительную часть, так чтобы условия (2.3.1) обеспечивали уравнения для поиска удовлетворяющих значений констант.

Тогда обозначим τ_1, τ_2, τ_3 значения собственных значений матрицы коэффициентов в задаче (2.2.2) с положительной действительной частью и предполагая, что:

$$\int_0^\infty \left| \mathrm{e}^{\tau_k l} \hat{F}_i(l) \right| dl < \infty,\ k = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, \tag{2.3.2}$$

можно сделать вывод, что при $x_2 \to \infty$ три последних компонента вектора правой части уравнения (2.2.6) стремятся к нулю.

Из этого следует что, необходимы чтобы и первые три компонента были равны нулю:

$$\tilde{C}_j = -\int_0^\infty \tilde{\zeta}_j(l) \mathrm{e}^{-\tau_j l} dl, \quad j = 1,\quad 2,\quad 3 \tag{2.3.3}$$

Мы видим, что условие (2.3.3) является также достаточным, поскольку для любых $j = 1, 2, 3$ при $x_2 \to \infty$ предел $e^{\tau_j x_2}(\tilde{C}_j + \int_0^{x_2} \tilde{\zeta}_j(l) \mathrm{e}^{-\tau_j l} dl)$ обращается в неопределенность типа $\infty \times 0$. Из правила Лопиталя [53], (2.2.5) и (2.3.2) следует:

$$\lim_{x_2 \to \infty} - \frac{\tilde{\zeta}_j(x_2)}{\tau_j} \to 0,$$

Таким образом для существования решения необходимо удовлетворить следующее достаточное условие:

$$\sum_{j=1}^{3} p_{kj} C_j + \left(i p_{k3} d_3 + p_{k4} \rho_s \right) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_k l} \hat{F}_1(l) dl + p_{k6} \rho_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_k l} \hat{F}_2(l) dl = 0,\ k = 1, 2, 3 \tag{2.3.4}$$

Для существования единственного решения предыдущей системы необходимо $\det(p_{kj})_{k,j=1,\ldots,3} \neq 0$. А для нашего случая оно имеет следующий вид:

$$(p_{kj})_{k,j=1,\ldots,3} = \begin{pmatrix} \dfrac{k_1 \mu \left(2 i \mu k_1^2 + \mathrm{i} \rho_s s^2 \right)}{\rho_s s^3} & \dfrac{2 k_1^2 \mu \varphi_1}{\rho_s s^3 \sqrt{\dfrac{\varphi_1}{\mu}}} & 0 \\ -\varphi_7 & -\dfrac{\varphi_6}{2 s \varphi_5 \varphi_8} & -\dfrac{\sqrt{2} \rho_0 s \left(3K\rho_l - 3K\rho_s + 4\mu\rho_0 + \varphi_2 - \varphi_3 \right)}{4 \varphi_5 \varphi_8} + \dfrac{1}{4\varphi_5} \\ \varphi_7 & \dfrac{\varphi_6}{2 s \varphi_4 \varphi_8} & \dfrac{\sqrt{2} \rho_0 s \left(3K\rho_l - 3K\rho_s + 4\mu\rho_0 + \varphi_2 - \varphi_3 \right)}{4 \varphi_4 \varphi_8} - \dfrac{1}{4\varphi_5} \end{pmatrix}, \tag{2.3.5}$$

здесь $\varphi_k, k=1,\ldots,8$ это коэффициенты, которые зависят от значений параметров $\alpha,\mu,\rho_0,\rho_s,K,s,k_1$(Приложении А). В виду предыдущего выражения, можем предположить, что матрица является обратимой. Таким образом имеем $C_j,\ j\ =\ 1,2,3$, являющиеся решениями следующей системы:

$$\sum_{j=1}^{3} p_{kj}C_j = (ip_{k3}d_3 - p_{k4}\rho_s)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_k l}\hat{F}_1(l)dl - p_{k6}\rho_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_k l}\hat{F}_2(l)dl,\ k=1,2,3.$$

Для коэффициентов $C_j,\ j=1,2,3$ получим:

$$C_j = -\sum_{q=1}^{3} r_{jq}\left(\left(ip_{q3}d_3 + p_{q4}\rho_s\right)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_q l}\hat{F}_1(l)dl + p_{q6}\rho_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_q l}\hat{F}_2(l)dl\right),\ j=1,2,3,\ R=(r_{kj})=((p_{kj})_{k,j=1,2,3})^{-1}$$

2.4 Аналитическое решение в явном виде

Решение системы (2.2.2), удовлетворяющее граничным условиям (2.1.10):

$$\begin{aligned}\hat{w}_m(x_2) = &-\sum_{k=1}^{3} z_{mk}\mathrm{e}^{\tau_k x_2}[\left(\mathrm{i}p_{k3}d_3 + p_{k4}\rho_s\right)\int_{x_2}^\infty \mathrm{e}^{-\tau_k l}\hat{F}_1(l)dl + p_{k6}\rho_0\int_{x_2}^\infty \mathrm{e}^{-\tau_k l}\hat{F}_2(l)dl]+\\ &+\sum_{k=4}^{6} z_{mk}\mathrm{e}^{-\tau_{k-3}x_2}[-\sum_{j,q=1}^{3} p_{kj}r_{jq}(\left(\mathrm{i}p_{q3}d_3 + p_{q4}\rho_s\right)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_q l}\hat{F}_1(l)dl + p_{q6}\rho_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_q l}\hat{F}_2(l)dl)+\\ &+\left(\mathrm{i}p_{k3}d_3 + p_{k4}\rho_s\right)\int_0^{x_2} \mathrm{e}^{\tau_{k-3}l}\hat{F}_1(l)dl + p_{k6}\rho_0\int_0^{x_2} \mathrm{e}^{\tau_{k-3}l}\hat{F}_2(l)dl],\qquad m=1,\ldots,6\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

А значения $\hat{v}_1$ можем определить по формуле (2.1.1) и $\hat{\sigma}_{11}$ по формуле (2.1.3). Параметры интегральных преобразований Фурье–Лапласса s и k_1 играют важную роль при вычислении коэффициентов и собственных значении матрицы. Это означает, что при вычислении обратных ~~преобразований Фурье–Лапласа~~преобразовании необходимо учитывать эту зависимость.

Для нахождения решения исходной задачи (1.2.1) – (1.2.8) в явном виде необходимо применить следующее обратное преобразование:

$$w(t,x_1,x_2) = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \hat{w}(s,k_1,x_2)e^{st+ik_1x_1}dk_1ds$$

к решению (2.4.1) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
w_m(t,x_1,x_2) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big\{ -\sum_{k=1}^{3} z_{mk}\,\mathrm{e}^{\tau_k x_2} \Big[\left(i\,p_{k3} d_3 + p_{k4}\frac{\rho_s}{k_1^2} \right) \int_{x_2}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau_k l}\,\hat{F}_1(l)dl + p_{k6}\,\rho_0 \int_{x_2}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau_k l}\,\hat{F}_2(l)dl \Big] + \\
+\sum_{k=4}^{6} z_{mk}\,\mathrm{e}^{-\tau_{k-3} x_2} \Big[-\sum_{j,q=1}^{3} p_{kj} r_{jq} \Big(\left(i\,p_{q3}\,d_3 + p_{q4}\frac{\rho_s}{k_1^2} \right) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_q l}\,\hat{F}_1(l)dl + p_{q6}\,\rho_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau_q l}\,\hat{F}_2(l)dl \Big) + \qquad (2.4.2) \\
\left(i\,p_{k3}\,d_3 + p_{k4}\frac{\rho_s}{k_1^2} \right) \int_0^{x_2} \mathrm{e}^{\tau_{k-3} l}\,\hat{F}_1(l)dl + p_{k6}\,\rho_0 \int_0^{x_2} \mathrm{e}^{\tau_{k-3} l}\,\hat{F}_2(l)dl \Big] \Big\} dk_1\,ds.
\end{aligned}
$$

где $m = 1,\ldots,6$.

Таким образом можно сформулировать следующую Теорема 1 о корректности постановки задачи (1.2.1) – (1.2.10).

Теорема 1: Задача (1.2.1) – (1.2.10) является корректной, т.е.

- в (2.3.4) получено необходимое и достаточное условие существования решения,

- условие единственности решения сформулировано в условии (2.3.5)

- и решение непрерывно зависит от начальных данных.

Доказательство: Поскольку вывод условий разрешимости и единственности решения уже получены в (2.3.4) и (2.3.5) задачи (1.2.1) – (1.2.10) остается показать непрерывную зависимость решения $w_m(t,x_1,x_2)$ в (2.4.2) от начальных условий, в частности от правой части $F(s,k_1,x_2) = ((F_1(t,x_1,x_2), F_2(t,x_1,x_2))$ введем следующие сокращенные обозначения $\hat{F}_{j\delta}$ такое, что $\left|\hat{F}_j - \hat{F}_{j\delta}\right| < \delta$, где $j = 1,2$ и $w_{m\varepsilon}$, удовлетворяющее условию $\left|w_m - w_{m\varepsilon}\right| < \varepsilon$, где $m = 1,...6$. Тогда с учетом того, что $\hat{F}_j$ является интегральным представлением согласно формуле (2.1.0) функции F_j, видим, что имеет место непрерывная зависимость от подынтегральных выражений в явном виде решения (2.4.2), т.е. можно показать, что $\forall\delta > 0$, $\exists\varepsilon$ такое, что выполняется условие:

$$
\left|F_j - F_{j\delta}\right| < \delta \Rightarrow \left|w_m - w_{m\varepsilon}\right| < \varepsilon
$$

Что показывает непрерывную зависимость решения от правой части уравнений. Аналогичные рассуждения верны для остальных начальных данных, включающих начально–граничные условия (1.2.9) и (1.2.10) и коэффициенты системы (1.2.1)–(1.2.8).

Таким образом, согласно определению корректности, приведенному в п 2.1, задача (1.2.1)–(1.2.10) является корректной.

2.5 Применение преобразований Фурье-Лапласа к функциям источника импульса

Применим также преобразование Фурье-Лапласа к функциям $\hat{F}_1(l),\ \hat{F}_2(l)$ в исходной системе вида , где $(s,k_1,x_2)\in[0;1)\times R\times[0;1)$, получим для правых частей следующие выражение:

Случай 1 (вида функции источника сейсмического импульса):

Первая компонента $F_1(t,\ x_1,\ x_2)$ вектора функции источника (1.2.11) $\vec{F}(t,\ x_1,\ x_2)=(F_1(t,\ x_1,\ x_2),F_2(t,\ x_1,\ x_2))$ сейсмического сигнала вида (1.2.12) после преобразования Фурье-Лапласа принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_1\left(s,k_1,x_2\right) &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_1\left(t,x_1,x_2\right)e^{-st-ik_1x_1}dx_1dt = \delta\left(x_2-x_2^0\right)\int_0^{\infty} f\left(t\right)e^{-st}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\delta\left(x_1-x_1^0\right)}{\partial x_1}e^{-ik_1x_1}dx_1dt = \\
&= \delta\left(x_2-x_2^0\right)\int_0^{\infty}-2\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}e^{-st}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\delta\left(x_1-x_1^0\right)}{\partial x_1}e^{-ik_1x_1}dx_1dt = \\
&= \delta\left(x_2-x_2^0\right)\int_0^{\infty}\frac{de^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}}{dt}e^{-st}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\delta\left(x_1-x_1^0\right)}{dx_1}e^{-ik_1x_1}dx_1dt = \\
&= e^{-ik_1x_1^0}ik_1\left[-e^{\pi^2 f_0^2\cdot t_0^2}+se^{\frac{s^2}{4\pi^2 f_0^2}-st_0}\frac{1}{2\pi f_0}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]\delta\left(x_2-x_2^0\right)
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Для получения данного результата применили интегрирование по частям по t :

$$\int_0^{\infty}\frac{de^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}}{dt}e^{-st}dt = \left|\begin{aligned}&u=e^{-st},du=-se^{-st}\\ &dv=\frac{de^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}}{dt}dt,v=e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}\end{aligned}\right| = e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2-st}\Big|_0^{\infty}-(-s)\int_{t_0}^{\infty}e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2-s\bar{t}}d\bar{t} = ,$$

$$= -e^{\pi^2 f_0^2\cdot t_0^2}+s\int_0^{\infty}e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2-st}dt = -e^{\pi^2 f_0^2\cdot t_0^2}+se^{\frac{s^2}{4\pi^2 f_0^2}-st_0}\ \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi f_0}$$

где с помощью выделения полного квадрата в показателе подынтегральной функции осуществили переход к Гамма функции, т.е. воспользовавшись следующим представлением:

$$-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2 - st = -\pi^2 f_0^2 \left[(t-t_0)^2 + \frac{s(t-t_0)}{\pi^2 f_0^2} + \frac{s^2}{4\pi^4 f_0^4} - \frac{s^2}{\pi^4 f_0^4} + \frac{st_0}{\pi^2 f_0^2} \right] =$$

$$= -\pi^2 f_0^2 \left[(t-t_0) + \frac{s}{2\pi^2 f_0^2} \right]^2 + \frac{s^2}{4\pi^2 f_0^2} - st_0$$

и определением Гамма функции:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{a^{\frac{n+1}{2}}} \quad (n > -1, a > 0)$$

определили, что в нашем случае $n = 0,\ a = \pi^2 f_0^2$.

Для интегрирования по x_1 используем формулу для обобщенных функций
$\langle \delta(x),\ \varphi(x) \rangle = \varphi(0)$ и получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x_1 - x_1^0\right) e^{-ik_1 x_1} dx_1 = e^{-ik_1 x_1^0}.$$

Вторая компонента $\hat{F}_2(t,\ x_1,\ x_2)$ вектора функции источника (1.2.11) сейсмического сигнала $\vec{F}(t,\ x_1,\ x_2) = (F_1(t,\ x_1,\ x_2), F_2(t,\ x_1,\ x_2))$ вида (1.2.12) после преобразования Фурье-Лапласа принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_2(t,\ x_1,\ x_2) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F_2\left(t, x_1, x_2\right) e^{-st-ik_1x_1} dx_1 dt = \frac{\partial \delta\left(x_2 - x_2^0\right)}{\partial x_2} \int_0^\infty f\left(t\right) e^{-st} \int_{-\infty}^\infty \delta\left(x_1 - x_1^0\right) e^{-ik_1x_1} dx_1 dt = \\
&= \frac{\partial \delta\left(x_2 - x_2^0\right)}{\partial x_2} \int_0^\infty -2\pi^2 f_0^2 \cdot (t-t_0) e^{-\pi^2 f_0^2 \cdot (t-t_0)^2} e^{-st} \int_{-\infty}^\infty \delta\left(x_1 - x_1^0\right) e^{-ik_1x_1} dx_1 dt = \\
&= \frac{\partial \delta\left(x_2 - x_2^0\right)}{\partial x_2} \int_0^\infty \frac{de^{-\pi^2 f_0^2 \cdot (t-t_0)^2}}{dt} e^{-st} \int_{-\infty}^\infty \delta\left(x_1 - x_1^0\right) e^{-ik_1x_1} dx_1 dt = \\
&= e^{-ik_1x_1^0} \left(-e^{\pi^2 f_0^2 \cdot t_0^2} + s e^{\frac{s^2}{4\pi^2 f_0^2} - st_0} \frac{1}{2\pi f_0} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) \frac{\partial \delta\left(x_2 - x_2^0\right)}{\partial x_2}
\end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

Для получения данного результата применили интегрирование по частям по t:

$$\int_0^{\infty}\frac{de^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}}{dt}e^{-st}dt=\begin{vmatrix}u=e^{-st}, du=-se^{-st}\\ dv=\dfrac{de^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}}{dt}dt, v=e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}\end{vmatrix}=$$

$$=e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2-st}\Big|_0^{\infty}-(-s)\int_{t_0}^{\infty}e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2-s\bar{t}}d\bar{t}=-e^{\pi^2 f_0^2\cdot t_0^2}+s\int_0^{\infty}e^{-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2-st}dt=$$

$$=-e^{\pi^2 f_0^2\cdot t_0^2}+se^{\frac{s^2}{4\pi^2 f_0^2}-st_0}\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi f_0}$$

где с помощью выделения полного квадрата в показателе подынтегральной функции осуществили переход к Гамма функции, т.е. воспользовавшись следующим представлением:

$$-\pi^2 f_0^2(t-t_0)^2-st=-\pi^2 f_0^2\left[(t-t_0)^2+\frac{s(t-t_0)}{\pi^2 f_0^2}+\frac{s^2}{4\pi^4 f_0^4}-\frac{s^2}{\pi^4 f_0^4}+\frac{st_0}{\pi^2 f_0^2}\right]=$$

$$=-\pi^2 f_0^2\left[(t-t_0)+\frac{s}{2\pi^2 f_0^2}\right]^2+\frac{s^2}{4\pi^2 f_0^2}-st_0$$

и определением Гамма функции:

$$\int_0^{\infty}x^n e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{a^{\frac{n+1}{2}}}\quad(n>-1, a>0)$$

определили, что в нашем случае $n=0,\ a=\pi^2 f_0^2$, т.е.

$$\int_0^{\infty}e^{-\pi^2 f_0^2\left[(t-t_0)+\frac{s}{2\pi^2 f_0^2}\right]^2+\frac{s^2}{4\pi^2 f_0^2}-st_0}dt=e^{\frac{s^2}{4\pi^2 f_0^2}-st_0}\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi f_0}$$

Для интегрирования по x_1 используем формулу для обобщенных функций $\langle\delta(x),\ \varphi(x)\rangle=\varphi(0)$ и получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x_1-x_1^0\right)e^{-ik_1x_1}dx_1=e^{-ik_1x_1^0}$$

<u>Случай 2</u> (Для функции импульса Пузырева):

Первая компонента $F_1(t,\, x_1,\, x_2)$ вектора функции источника $\vec{F}(t,\, x_1,\, x_2) = (F_1(t,\, x_1,\, x_2), F_2(t,\, x_1,\, x_2))$ (1.2.11) сейсмического сигнала вида (1.2.13) (импульса Пузырева) после преобразования Фурье-Лапласа принимает следующий вид:

$$\hat{F}_1\left(s,k_1,x_2\right) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty F_1\left(t,x_1,x_2\right) e^{-st-ik_1x_1} dx_1 = \delta\left(x_2 - x_2^0\right) \int\limits_0^\infty f\left(t\right) e^{-st} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\partial \delta\left(x_1 - x_1^0\right)}{\partial x_1} e^{-ik_1\left(x_1 - x_1^0\right)} dx_1 dt =$$

$$= \delta\left(x_2 - x_2^0\right) \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\pi^2 f_0^2 \cdot (t-t_0)^2}{\gamma^2}} \sin(2\pi f_0 \cdot (t - t_0)) e^{-st} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\partial \delta\left(x_1 - x_1^0\right)}{\partial x_1} e^{-ik_1x_1} dx_1 dt = \tag{2.5.3}$$

$$= \frac{k_1}{4} \frac{\gamma}{\pi f_0} e^{-ik_1x_1^0 - st_0} \left(e^{\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2} - e^{\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \delta\left(x_2 - x_2^0\right)$$

Для получения данного результата воспользуемся следующими представлениями:

$$\sin(2\pi f_0 \cdot (t - t_0)) = \frac{e^{i2\pi f_0 \cdot (t-t_0)} - e^{-i2\pi f_0 \cdot (t-t_0)}}{2i}$$

тогда перепишем интеграл, входящий в (2.5.3), в следующем виде:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\pi^2 f_0^2 \cdot (t-t_0)^2}{\gamma^2}} \frac{e^{i2\pi f_0 \cdot (t-t_0)} - e^{-i2\pi f_0 \cdot (t-t_0)}}{2i} e^{-st} =$$

$$= \frac{1}{2i} \int\limits_{t_0}^\infty \left(e^{-\frac{\pi^2 f_0^2 \cdot (t-t_0)^2}{\gamma^2} + i2\pi f_0 \cdot (t-t_0) - s(t-t_0) - st_0} - e^{-\frac{\pi^2 f_0^2 \cdot (t-t_0)^2}{\gamma^2} - i2\pi f_0 \cdot (t-t_0) - s(t-t_0) - st_0}\right) dt = \quad , \tag{2.5.4}$$

$$= \frac{1}{2i} e^{-st_0} \int\limits_{t_0}^\infty \left(e^{-\frac{\pi^2 f_0^2 \cdot (t-t_0)^2}{\gamma^2} + i2\pi f_0 \cdot (t-t_0) - s(t-t_0)} - e^{-\frac{\pi^2 f_0^2 \cdot (t-t_0)^2}{\gamma^2} - i2\pi f_0 \cdot (t-t_0) - s(t-t_0)}\right) dt$$

где, выделив полный квадрат в показателе экспоненциальной функции, можем перейти к выражению с Гамма функцией, т.е.:

$$-\frac{\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2}{\gamma^2} + i2\pi f_0 \cdot (t-t_0) - s(t-t_0) = -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0))^2 - 2\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})\cdot (t-t_0) \right] =$$

$$= -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0)^2 - 2\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})\cdot (t-t_0) + \frac{\gamma^4}{\pi^4 f_0^4}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2 - \frac{\gamma^4}{\pi^4 f_0^4}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2 \right] =$$

$$= -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0) - \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2}) \right]^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2$$

По определению Гамма функции $\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{a^{\frac{n+1}{2}}}$ $(n > -1, a > 0)$

получим, что в этом случае $n = 0,\ a = \frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2} > 0$, и справедливо следующее:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0) - \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2}) \right]^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2} dt = e^{\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2}\ \frac{\gamma}{2\pi f_0}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Второе слагаемое в (2.5.4) аналогично приводится к Гамма функции, и после выделения полного квадрата в показателе соответствующей экспоненциальной функции:

$$-\frac{\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2}{\gamma^2} - i2\pi f_0 \cdot (t-t_0) - s(t-t_0) = -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0))^2 + 2\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})\cdot (t-t_0) \right] =$$

$$= -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0)^2 + 2\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})\cdot (t-t_0) + \frac{\gamma^4}{\pi^4 f_0^4}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2 - \frac{\gamma^4}{\pi^4 f_0^4}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2 \right] =$$

$$= -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0) + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2}) \right]^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2$$

получаем выражение следующего вида:

$$\int\limits_{t_0}^\infty e^{-\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0) + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2}) \right]^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2} dt = e^{\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2}\ \frac{\gamma}{2\pi f_0}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

После интегрирования по частям по переменной x_1 и применения формулы для обобщенных функций $\langle \delta(x),\ \varphi(x) \rangle = \varphi(0)$ получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \delta\left(x_1 - x_1^0\right)}{\partial x_1} e^{-ik_1 x_1} dx_1 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x_1 - x_1^0\right)\frac{\partial e^{-ik_1 x_1}}{\partial x_1} dx_1 = -(-ik_1)e^{-ik_1 x_1^0} = ik_1 e^{-ik_1 x_1^0}$$

Подставив все полученные выражения в в (2.5.3) получим окончательное представление в этом выражении через Гамма функцию.

Вторая компонента $F_2(t,\, x_1,\, x_2)$ вектора функции источника $\vec{F}(t,\, x_1,\, x_2) = (F_1(t,\, x_1,\, x_2), F_2(t,\, x_1,\, x_2))$ вида (1.2.11) сейсмического сигнала вида (1.2.13) (импульса Пузырева) после преобразования Фурье-Лапласа принимает следующий вид:

$$\hat{F}_2(s,k_1,x_2) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty F_2(t,x_1,x_2) e^{-st-ik_1x_1} dx_1 = \frac{\partial\delta\left(x_2 - x_2^0\right)}{\partial x_1} \int\limits_0^\infty f(t) e^{-st} \int\limits_{-\infty}^\infty \delta\left(x_1 - x_1^0\right) e^{-ik_1x_1} dx_1 dt =$$
$$= \frac{\partial\delta\left(x_2 - x_2^0\right)}{\partial x_1} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}{\gamma^2}} \sin(2\pi f_0\cdot(t-t_0)) e^{-st} \int\limits_{-\infty}^\infty \delta\left(x_1 - x_1^0\right) e^{-ik_1x_1} dx_1 dt = \qquad (2.5.5)$$
$$= \frac{k_1}{4}\frac{\gamma}{\pi f_0}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-ik_1x_1^0 - st_0} \left(e^{\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2} - e^{\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2}\right) \frac{\partial\delta\left(x_2 - x_2^0\right)}{\partial x_2}$$

Для получения данного результата воспользуемся следующими представлениями:

$$\sin(2\pi f_0\cdot(t-t_0)) = \frac{e^{i2\pi f_0\cdot(t-t_0)} - e^{-i2\pi f_0\cdot(t-t_0)}}{2i},$$

тогда перепишем интеграл, входящий в (2.5.5), в следующем виде:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}{\gamma^2}} \frac{e^{i2\pi f_0\cdot(t-t_0)} - e^{-i2\pi f_0\cdot(t-t_0)}}{2i} e^{-st} =$$
$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{t_0}^\infty \left(e^{-\frac{\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}{\gamma^2} + i2\pi f_0\cdot(t-t_0) - s(t-t_0) - st_0} - e^{-\frac{\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}{\gamma^2} - i2\pi f_0\cdot(t-t_0) - s(t-t_0) - st_0}\right) dt = , \qquad (2.5.6)$$
$$= \frac{1}{2i} e^{-st_0} \int\limits_{t_0}^\infty \left(e^{-\frac{\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}{\gamma^2} + i2\pi f_0\cdot(t-t_0) - s(t-t_0)} - e^{-\frac{\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2}{\gamma^2} - i2\pi f_0\cdot(t-t_0) - s(t-t_0)}\right) dt$$

где, выделив полный квадрат в показателе экспоненциальной функции, можем перейти к выражению с Гамма функцией, т.е.:

$$-\frac{\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2}{\gamma^2} + i2\pi f_0 \cdot (t-t_0) - s(t-t_0) = -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0))^2 - 2\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})\cdot(t-t_0) \right] =$$

$$= -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0)^2 - 2\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})\cdot(t-t_0) + \frac{\gamma^4}{\pi^4 f_0^4}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2 - \frac{\gamma^4}{\pi^4 f_0^4}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2 \right] =$$

$$= -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0) - \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2}) \right]^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2$$

По определению Гамма функции $\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{a^{\frac{n+1}{2}}}$ $(n > -1, a > 0)$ получим, что в этом случае $n = 0,\ a = \frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2} > 0$, и справедливо следующее:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0) - \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2}) \right]^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2} dt = e^{\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 - \frac{s}{2})^2} \frac{\gamma}{2\pi f_0}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Второе слагаемое в (2.5.6) аналогично приводится к Гамма функции после выделения полного квадрата в показателе экспоненциальной функции:

$$-\frac{\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2}{\gamma^2} - i2\pi f_0 \cdot (t-t_0) - s(t-t_0) = -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0))^2 + 2\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})\cdot(t-t_0) \right] =$$

$$= -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0)^2 + 2\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})\cdot(t-t_0) + \frac{\gamma^4}{\pi^4 f_0^4}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2 - \frac{\gamma^4}{\pi^4 f_0^4}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2 \right] =$$

$$= -\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0) + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2}) \right]^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2,$$

И в результате получаем выражение следующего вида:

$$\int\limits_{t_0}^\infty e^{-\frac{\pi^2 f_1^2}{\gamma^2}\left[(t-t_0) + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2}) \right]^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2} dt = e^{\frac{\gamma^2}{\pi^2 f_0^2}(i\pi f_0 + \frac{s}{2})^2} \frac{\gamma}{2\pi f_0}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

После интегрирования по частям по переменной x_1 и применения формулы для обобщенных функций $\langle \delta(x),\ \varphi(x) \rangle = \varphi(0)$ получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x_1 - x_1^0\right) e^{-ik_1 x_1} dx_1 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x_1 - x_1^0\right) \frac{\partial e^{-ik_1 x_1}}{\partial x_1} dx_1 = -(-ik_1) e^{-ik_1 x_1^0} = ik_1 e^{-ik_1 x_1^0}$$

Подставив все полученые выражения в (2.5.5) получим окончательное представление в этом выражении через Гамма функцию.

Выводы по второму разделу

Таким образом, во втором разделе диссертации получены следующие результаты теоретического исследования аналитического решения исходной задачи:

- Обоснована корректность поставленной в первом разделе задачи путем приведения исходной задачи к системе ОДУ с помощью интегрального преобраования Фурье-Лапласа. Вычисления собственных значений матрицы коэффициентов полученной системы, приведенной к каноническому виду позволило установить, что спектр матрицы состоит из трех пар различных попарно противоположных собственных значений, что подтверждает достаточность трех краевых условий для определенности постановленной задачи.
- Получены необходимое и достаточное условия разрешимости поставленной задачи.
- Получено аналитические решение исходной задачи в явном виде.
- Получены результаты пребразования Фурье-Лапласа для компонент функций источника сейсмического импульса двух видов, имеющих физический смысл.

3 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

3.1 Матричная форма системы

В третьем разделе диссертации приведены результаты исследований, опубликованные в [39]. Мы можем переписать систему (1.2.1) – (1.2.8) в матричной форме:

$$A\frac{\partial w}{\partial t}+B\frac{\partial w}{\partial x_1}+C\frac{\partial w}{\partial x_2}=D,$$

где $w=\left(u_1,u_2,v_1,v_2,\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{22},p\right)^T$ и матрицы A, B, C, D имеют следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\frac{1}{\rho_s}&0&0&\frac{1}{\rho_0}\\0&0&0&0&0&\frac{1}{\rho_s}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\rho_0}\\0&0&0&0&0&0&0&0\\\frac{\rho_s}{\rho_0}K+\frac{4}{3}\mu&0&-\frac{\rho_s}{\rho_0}K&0&0&0&0&0\\0&\mu&0&0&0&0&0&0\\\frac{\rho_s}{\rho_0}K-\frac{2}{3}\mu&0&-\frac{\rho_s}{\rho_0}K&0&0&0&0&0\\\frac{\rho_s}{\rho_0}\alpha-K&0&\frac{\rho_l}{\rho_0}\alpha&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&\frac{1}{\rho_s}&0&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\rho_s}&\frac{1}{\rho_0}\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\rho_0}\\0&\frac{\rho_s}{\rho_0}K-\frac{2}{3}\mu&0&-\frac{\rho_s}{\rho_0}K&0&0&0&0\\\mu&0&0&0&0&0&0&0\\0&\frac{\rho_s}{\rho_0}K+\frac{4}{3}\mu&0&-\frac{\rho_s}{\rho_0}K&0&0&0&0\\0&\frac{\rho_s}{\rho_0}\alpha-K&0&\frac{\rho_l}{\rho_0}\alpha&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_1\\F_2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Поиск численного решения уравнений (1.2.1) – (1.2.10) начинается с построения дискретного аналога. Алгоритм вычисления решения по явной противопоточной схеме строится на равномерной разнесенной сетке методом конечных разностей.

Поскольку в задаче (1.2.1) – (1.2.10) граничные условия ставятся только для трех функций (1.2.10) на левой границе при $x_2 = 0$, то для остальных функций на правой границе достаточно большой области выполняются условия затухания функций на бесконечности. Для получения численного решения воспользуемся противопоточной разностной схемой, которая аппроксимирует производные, начиная с нижней границы по оси x_2 (вместо бесконечности берется достаточно большое значение $x_2 = L$), где далее движение происходит вверх к границе со значение $x_2 = 0$. Для обеспечения сходимости численного решения на основе явной разностной схемы необходимо выбирать шаги по временным и пространственным переменным так, чтобы они удовлетворяли условиям Куранта–Фридрихса–Леви (КФЛ), т.е. выполнялись следующие неравенства:

$$\max(\lambda_i(B))\frac{\Delta t}{h_1} \le 1,\ \max(\lambda_i(C))\frac{\Delta t}{h_2} \le 1$$

где $\lambda_i(B)$ собственные значения матрицы B и $\lambda_i(C)$ – собственные значения матрицы C, $i = 1,...,8$, h_1 – шаг по оси x_1 и h_2 – шаг по оси x_2.

Блок–схема численного решения представлена на рисунке 8:

Рисунок 8 – Блок–схема численного решения динамической задачи пороупругости

3.2 Дискретная аппроксимация задачи

Использование конечно–разностного метода как в [37, с.40-44] показало также свою эффективность при численном решении поставленной задачи на построенной равномерной разнесенной сетке в области $Q_T = [0,T] \times \Omega$, где $\Omega = [0,R] \times [0,L]$ заданной с шахматным расположением узлов.

Введем для такой равномерной разностной сетки следующие обозначения:

$$\omega = \omega_\tau \times \omega_h,\ \omega_h = \omega_h^{(1)} \times \omega_h^{(2)},$$

$$\omega_\tau = \left\{ t^n = n\tau,\ n = 0,1,...,N_t,\ N_t\tau = T \right\},$$

$$\omega_h^{(1)} = \left\{ x_{1,i} = ih_1,\ i = 0,1,...,N_1,\ N_1 h_1 = R \right\},$$

$$\omega_h^{(2)} = \left\{ x_{2,j} = jh_2,\ j = 0,1,...,N_2,\ N_2 h_2 = L \right\}$$

с шахматным расположением узлов, показанным на рисунке 9. Предполагается, что вся область $\Omega = [0,R] \times [0,L]$ состоит только из пористой среды, где $0 < L$ и $L = Nh_2$. Обозначим через ω_h множество узлов разностной сетки, то есть:

$$\omega_h = \left\{ \left(x_{1,i}, x_{2,j} \right) \in \omega_h : i = 0,1,...,N_1,\ j = 0,1,...,N_2 \right\}.$$

В помощью индексов введем следующие обозначения искомых сеточных функций по аналогии с дифференциальной задачей (1.2.1) – (1.2.10), добавив верхний индекс h, нижний и верхний индексы, обозначающие порядковые номера узлов:

$$\left(u_1^h\right)_{i,j}^n = u_1\left(ih_1, jh_2, \tau n\right), \quad \left(u_2^h\right)_{i,j}^n = u_2\left(ih_1, jh_2, \tau n\right),$$

$$\left(v_1^h\right)_{i,j}^n = v_1\left(ih_1, jh_2, \tau n\right), \quad \left(v_2^h\right)_{i,j}^n = v_2\left(ih_1, jh_2, \tau n\right),$$

$$\left(\sigma_{11}^h\right)_{i,j}^n = \sigma_{11}\left(ih_1, jh_2, \tau n\right), \quad \left(\sigma_{12}^h\right)_{i,j}^n = \sigma_{12}\left(ih_1, jh_2, \tau n\right),$$

$$\left({\sigma_{22}}^h\right)_{i,j}^n = \sigma_{22}\left(ih_1, jh_2, \tau n\right), \quad \left(p^h\right)_{i,j}^n = p\left(ih_1, jh_2, \tau n\right).$$

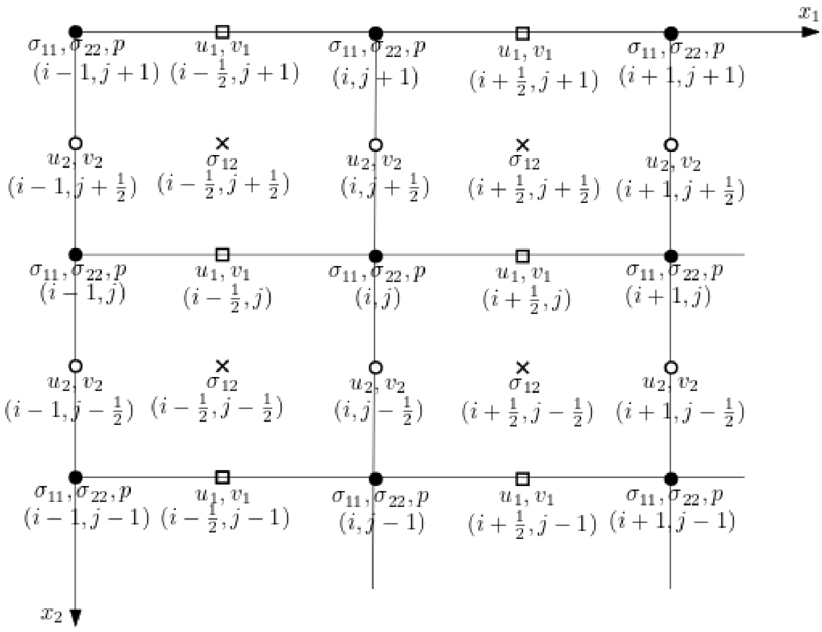


Рисунок 9 – Разностная сетка с шахматным расположением узлов

Аналогичная сетка использовалась в [56] во избежание появления осцилляций в функциях решений при использовании центральных разностей на неразнесенной сетке. Распределяем сеточные функции по узлам таким образом, чтобы:

- продольные компоненты u_1 и v_1 векторов скоростей $\vec{u}$ and $\vec{v}$ вычислялись в узлах $(i+1/2, j)$ по направлению переменной x_1,

- поперечные компоненты u_2 и v_2 векторов скоростей $\vec{u}$ and $\vec{v}$ вычисляются в узлах $(i, j+1/2)$ в направлении переменной x_2

- диагональные компоненты σ_{11}, σ_{22}, тензора напряжений и давления в узлах (i, j),

- недиагональные компоненты σ_{12} в узлах $(i+1/2, j+1/2)$.

Тогда дифференциальная задача (1.2.1) – (1.2.10) будет аппроксимирована следующей явной разностной схемой на разностной сетке ω_h:

$$\frac{\left(u_1^h\right)^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} - \left(u_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\tau} + \frac{1}{\rho_s}\left(\frac{\left(\sigma_{11}^h\right)^{n}_{i+1,j} - \left(\sigma_{11}^h\right)^{n}_{i,j}}{h_1} + \frac{\left(\sigma_{12}^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \left(\sigma_{12}^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{h_2}\right) +$$

$$+\frac{1}{\rho_0}\frac{\left(p^h\right)^{n}_{i+1,j} - \left(p^h\right)^{n}_{i,j}}{h_1} = \left(F_1^h\right)^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}, \qquad (3.2.1)$$

$$\frac{\left(u_2^h\right)^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(u_2^h\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\tau}+\frac{1}{\rho_s}\left(\frac{\left(\sigma_{12}^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-\left(\sigma_{12}^h\right)^{n}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{h_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\sigma_{22}^h\right)^{n}_{i,j+1}-\left(\sigma_{22}^h\right)^{n}_{i,j}}{h_2}\right)+\frac{1}{\rho_0}\frac{\left(p^h\right)^{n}_{i,j+1}-\left(p^h\right)^{n}_{i,j}}{h_2}=\left(F_2^h\right)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}, \qquad (3.2.2)$$

$$\frac{\left(v_1^h\right)^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(v_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\tau}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\left(p^h\right)^{n}_{i+1,j}-\left(p^h\right)^{n}_{i,j}}{h_1}=\left(F_1^h\right)^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j}, \qquad (3.2.3)$$

$$\frac{\left(v_2^h\right)^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(v_2^h\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\tau}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\left(p^h\right)^{n}_{i,j+1}-\left(p^h\right)^{n}_{i,j}}{h_2}=\left(F_2^h\right)^{n+\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2}}, \qquad (3.2.4)$$

$$\frac{\left(\sigma_{11}^h\right)^{n+1}_{i,j}-\left(\sigma_{11}^h\right)^{n}_{i,j}}{\tau}+\beta_1\frac{\left(u_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(u_1^h\right)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}}{h_1}+\beta_2\frac{\left(u_2^h\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(u_2^h\right)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_2}-$$

$$-\frac{\rho_s}{\rho_0}K\left(\frac{\left(v_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(v_1^h\right)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}}{h_1}+\frac{\left(v_2^h\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(v_2^h\right)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_2}\right)=0, \qquad (3.2.5)$$

$$\frac{\left(\sigma_{12}^h\right)^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-\left(\sigma_{12}^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\tau}+\mu\left(\frac{\left(u_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1}-\left(u_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{h_2}+\frac{\left(u_2^h\right)^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}-\left(u_2^h\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_1}\right)=0, \qquad (3.2.6)$$

$$\frac{\left(\sigma_{22}^h\right)^{n+1}_{i,j}-\left(\sigma_{22}^h\right)^{n}_{i,j}}{\tau}+\beta_2\frac{\left(u_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(u_1^h\right)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}}{h_1}+\beta_1\frac{\left(u_2^h\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(u_2^h\right)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_2}-$$

$$-\frac{\rho_s}{\rho_0}K\left(\frac{\left(v_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(v_1^h\right)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}}{h_1}+\frac{\left(v_2^h\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(v_2^h\right)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_2}\right)=0, \qquad (3.2.7)$$

$$\frac{\left(p^h\right)^{n+1}_{i,j}-\left(p^h\right)^{n}_{i,j}}{\tau}+\beta_3\left(\frac{\left(u_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(u_1^h\right)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}}{h_1}+\frac{\left(u_2^h\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(u_2^h\right)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_2}\right)+$$

$$+\frac{\rho_l}{\rho_0}\alpha\left(\frac{\left(v_1^h\right)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\left(v_1^h\right)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}}{h_1}+\frac{\left(v_2^h\right)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-\left(v_2^h\right)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_2}\right)=0, \qquad (3.2.8)$$

где коэффициенты β_i вычисляются по следующим формулам:

$$\beta_1=\frac{\rho_s}{\rho_0}K+\frac{4}{3}\mu\,,\ \beta_2=\frac{\rho_s}{\rho_0}K-\frac{2}{3}\mu\,,\ \beta_3=\frac{\rho_s}{\rho_0}\alpha-K.$$

Из разностной схемы (3.2.1)-(3.2.8) можно увидеть, что значения сеточных функций на $(n+1)$ –ом временном слое вычисляются по явным формулам (3.2.1) – (3.2.8) при известных значениях этих же сеточных функций на n –м временном слое в узлах $\left(u_1^h\right)_{i+\frac{1}{2},j}^n$, $\left(u_2^h\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n$, $\left(v_1^h\right)_{i+\frac{1}{2},j}^n$, $\left(v_2^h\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n$, $\left(\sigma_{11}^h\right)_{i,j}^n$, $\left(\sigma_{12}^h\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n$, $\left(\sigma_{22}^h\right)_{i,j}^n$, $\left(p^h\right)_{i,j}^n$ Таким образом можно построить алгоритм численного решения задачи, причем с учетом граничных условий вычисление значений сеточных функций u_1^h, u_2^h и v_2^h по формулам (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) начинается с верхнего правого угла, а вычисление значений сеточных функций $\sigma_{12}^h, \sigma_{22}^h$ и p^h по формулам (3.2.6), (3.2.7) и (3.2.8) начинается с нижнего левого угла расчетной сетки.

Алгоритм численного решения сеточных функций представлен на рисунке 10.

Рисунок 10 **–** Блок–схема численного решения сеточных функций

Выводы по третьему разделу

Для разработки численного решения исходной задачи (1.2.1) – (1.2.10) приняты следующие этапы:

– получены дискретные аналоги восьми уравнений исходной задачи с применением явной конечно–разностной схемы;

– аппроксимация искомых сеточных функций производится на разнесенной сетке, что позволяет избежать появление осцилляций в функциях решений при использовании центральных разностей на неразнесенной сетке.

– приведена блок–схема численного решения.

4 РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

4.1 Вычислительные эксперименты

По предложенному алгоритму были проведены два вычислительных эксперимента, моделирующих распространение сейсмических волновых полей в двумерной упругопористой среде, заполненной вязкой жидкостью. Среда однородна и изотропна, свойства составляющих ее материалов характеризуются скоростями распространения в ней двух продольных c_{p_1}, c_{p_2} и одной поперечной c_s звуковых волн. Определим двумерную область квадратной формы $\mathbf{x} \in \Omega$ со стороной 100 м, в которой заданы нулевые начальные условия и граничные условия на левой границе для трех функций σ_{12}^h, σ_{22}^h, и p^h, а на правой границе для функций u_1^h, u_2^h и v_2^h для различных значений параметров и функции, описывающей сейсмические волны.

Программный код для реализации алгоритма был разработан с использованием нового высокопроизводительного язык программирования Julia (бесплатно и свободно распространяется по лицензии MIT). Julia — динамичный, высокоуровневый, высокопроизводительный язык программирования, специально созданный для технических вычислений, с синтаксисом, аналогичным Python. Он в основном используется в машинном обучении, науке о данных, интеллектуальном анализе данных, численном анализе и в любых математических целях, поскольку линейная алгебра является основной функцией этого языка. Разработанная для работы со сложными моделями данных, Julia отличается простотой, высокой производительностью и скоростью.

Расчеты проводились с использованием параллельных вычислений на компьютере с техническими характеристиками, приведенными в таблице 1:

Таблица 1 – Описание оборудования

Описание	Технические характеристики
Процессор	16–ядерный AMD Ryzen 9 3950X
Частота	3.5 GHz (Matisse)
RAM	64 GB

Использование явной разностной схемы, содержащей циклические участки, позволяет программному обеспечению создавать распараллеленные алгоритмы для эффективного использования вычислительных ресурсов.

Динамическая визуализация результатов вычислительных экспериментов, представленных в данной статье, была выполнена с помощью пакета программ ParaView.

4.1.1 Первый вычислительный эксперимент

Реальные исходные данные для физических параметров в первом вычислительном эксперименте задачи взяты из статьи [54] и представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Входные физические параметры и характеристики сетки в первом вычислительном эксперименте

№	Название входных физических параметров и параметров разностной сетки	Обозначение	Значение	Ед.измерения
1	2	3	4	5
1	Физическая плотность матрицы	ρ_s^f	1.4 (мел)	$г/см^3$
2	Физическая плотность жидкости	ρ_l^f	1 (вода)	$г/см^3$
3	Логарифмическая скорость быстрой (продольной) волны	c_{p_1}	2000	$м/с$
4	Логарифмическая скорость медленной (продольной) волны	c_{p_2}	450	$м/с$
5	Скорость поперечной волны	c_s	1400	$м/с$
6	Пористость	d_0	0.2 (песчпник слабый)	
7	Область интегрирования по оси x_1	R	100	$м$
8	Область интегрирования по оси x_2	L	100	$м$
9	Количество узлов по оси x_1	N_1	400	
10	Количество узлов по оси x_2	N_2	400	
11	Количество временных слоев	N_t	10^5	

12	Шаг по оси x_1	h_1	$\frac{R}{N_1}=\frac{100}{400}=0,25$	*м*

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4	5
13	Шаг по оси x_2	h_2	$\frac{L}{N_2}=\frac{100}{400}=0,25$	*м*
14	Шаг во времени	τ	$\frac{9\cdot 10^{-5}\cdot h_1}{20\sqrt{10}}\approx 3.5575\cdot 10^{-7}$	*с*
15	Время распространения сигнала	T	0.02135	*с*
16	Безразмерный параметр источника	$\tilde{\gamma}$	4	
17	Центральная частота источника	f_0	1	*Гц*
18	Длительность сигнала источника	t_0	1	*с*

Функция источника $F\left(t,x_1,x_2\right)=(F_1\left(t,x_1,x_2\right),F_2\left(t,x_1,x_2\right))$ описывается следующими формулами:

$$F_1(t,x_1,x_2)=f(t)\frac{\partial\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),$$

$$F_2(t,x_1,x_2)=f(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\frac{\partial\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\partial x_2},$$

где функция импульса описывается формулой:

$$f(t)=\begin{cases}-2\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)\exp(-\pi^2 f_0^2\cdot(t-t_0)^2),\ t\le 2t_0,\\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t>2t_0\end{cases},$$

С координатами источника:

$$\mathbf{x}_0=(x_1^0,\ x_2^0)=(50,14).$$

~~функции~~Динамика изменения $f(t)$ ~~показан~~продемонстрирована на рисунке 11.

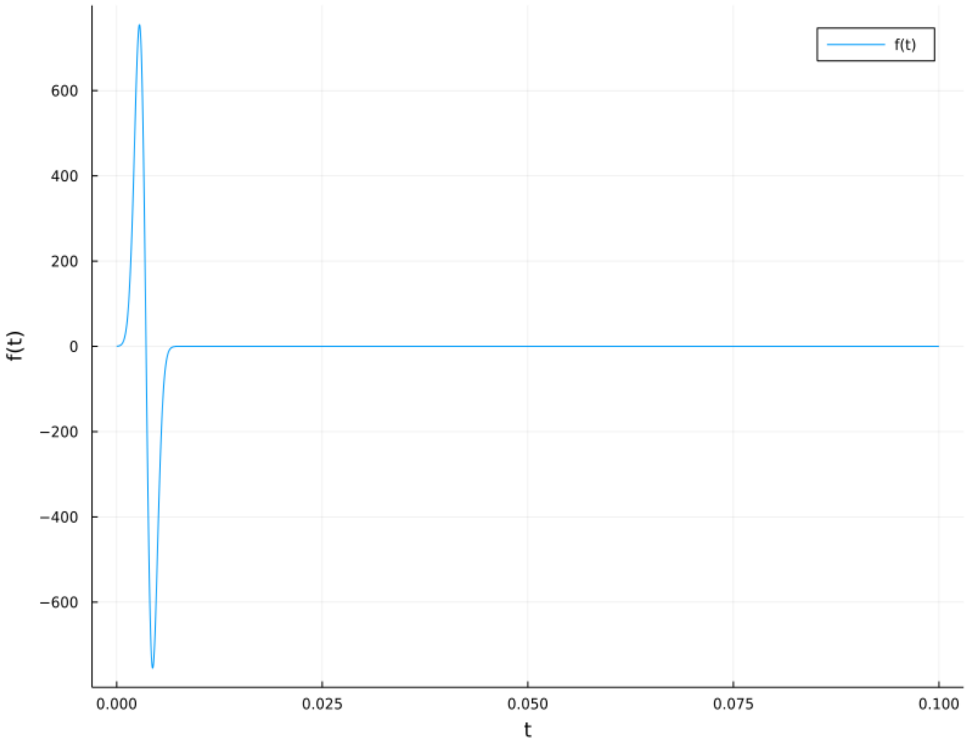


Рисунок 11 – Функция $f(t)$

Дельта–функция $\delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ аппроксимируем с помощью функции «шапочка» вида:

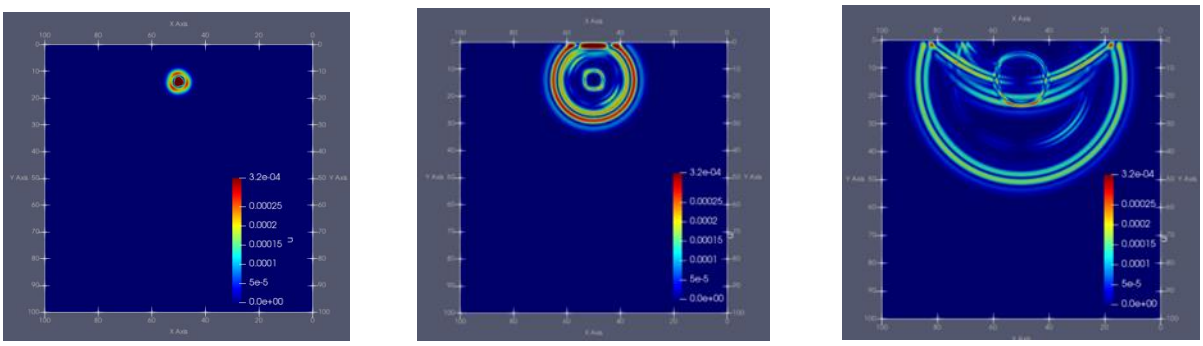
$$\delta(\mathbf{x})\approx\Delta_1(\mathbf{x})=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|\mathbf{x}|^2}\right), & |\mathbf{x}|<\varepsilon,\\ 0, & |\mathbf{x}|\geq\varepsilon,\end{cases}$$

где $\varepsilon\to 0$ параметр. Производная по переменной x_k, $(k=1{,}2)$ имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta_1(\mathbf{x})=\begin{cases}-\dfrac{2\varepsilon^2 x_k}{\left(\varepsilon^2-|\mathbf{x}|^2\right)^2}\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|\mathbf{x}|^2}\right), & |\mathbf{x}|<\varepsilon,\\ 0, & |\mathbf{x}|\geq\varepsilon.\end{cases}$$

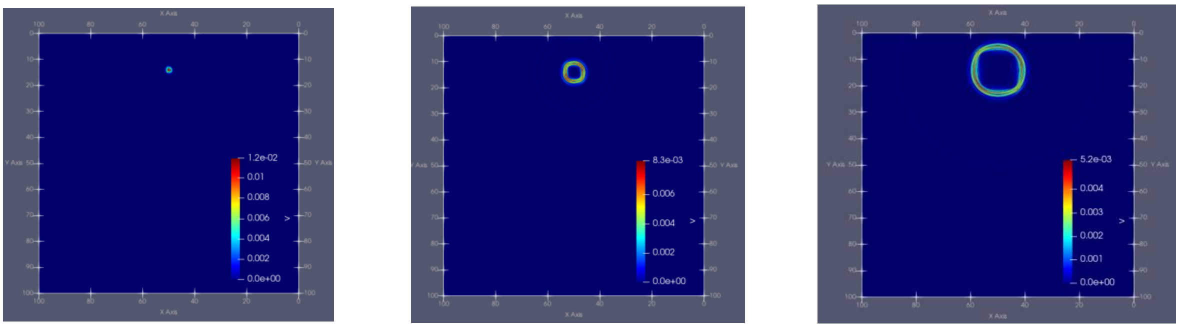
Визуализация результатов вычислительных экспериментов представлена на Рисунках 12 и 13.

На рисунках 12 и 13 показана динамика изменения модуля векторов $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$ и $|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ от момента времени $t=0.00356c$ до момента $t=0.02135c$ с определенными интервалами времени. Вычислительный процесс в этом эксперименте занял 34 минуты.



(a) $|\vec{u}(0.00356, x_1, x_2)|$ (b) $|\vec{u}(0.01067, x_1, x_2)|$ (c) $|\vec{u}(0.02135, x_1, x_2)|$

Рисунок 12 – График модуля скорости $|\vec{u}|$ твердой фазы в первом вычислительном эксперименте на интервалах времени: (a) $t =$ 0.00356 c, (b) $t =$ 0.01067 c, (c) $t =$ 0.02135 c



(a) $|\vec{v}(0.00356, x_1, x_2)|$ (b) $|\vec{v}(0.01067, x_1, x_2)|$ (c) $|\vec{v}(0.02135, x_1, x_2)|$

Рисунок 13 – График модуля скорости $|\vec{v}|$ жидкой фазы в первом вычислительном эксперименте на интервалах времени: (a) $t =$ 0.00356 c, (b) $t =$ 0.01067 c, (c) $t =$ 0.02135 c

На динамических графиках на рисунке 12 и рисунке 13 видно, что скорость в твердой фазе изменяется во времени быстрее, чем в жидкой, что согласуется с наблюдаемыми экспериментальными данными.

Сейсмограммы компонент $u_1(x_2,t)$ и $u_2(x_2,t)$ по трассам, проходящим через точку источника импульса, представлены на рисунке 14 и рисунке 15 соответственно.

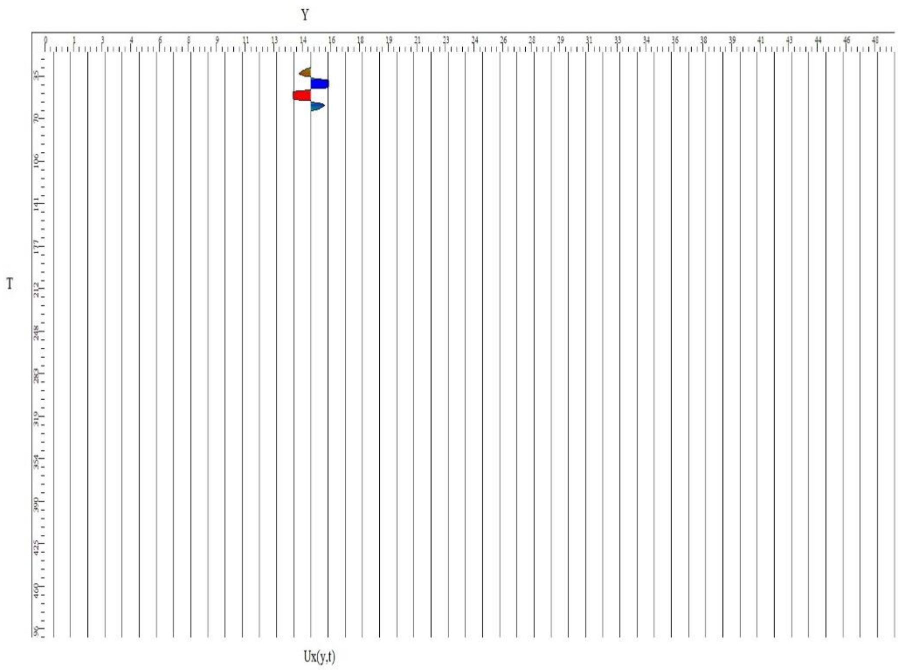


Рисунок 14 – Сейсмограмма компоненты скорости $u_1(x_2, t)$

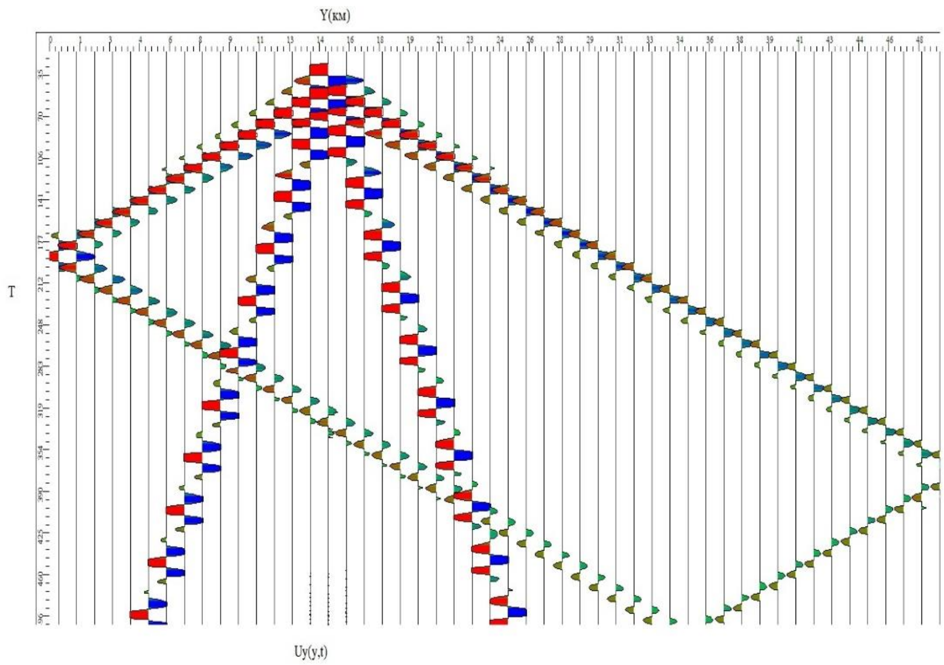


Рисунок 15 – Сейсмограмма компоненты скорости $u_2(x_2, t)$

4.1.2 Второй вычислительный эксперимент

Во втором вычислительном эксперименте другой набор значений физических параметров и вид функции источника, описывающей сейсмический импульс задачи, берутся из [54]:

а) параметры разностной сетки:

$$N_1 = N_2 = 400\,,\; N_t = 5\cdot10^5\,,\; \tau = \frac{9\cdot10^{-5}h_1}{\sqrt{4200}} \approx 2.4303\cdot10^{-5};$$

Таблица 3 – Входные физические параметры и характеристики разностной сетки во втором вычислительном эксперименте

№	Название входных физических параметров и параметров разностной сетки	Обозначения	Значение	Ед. измерения
1	2	3	4	5
1	Физическая плотность матрицы	ρ_s^f	1.5 (угли)	$г/см^3$
2	Физическая плотность жидкости	ρ_l^f	1 (вода)	$г/см^3$
3	Логарифмическая скорость быстрой (продольной) волны	c_{p_1}	2000	$м/с$
4	Логарифмическая скорость медленной (продольной) волны	c_{p_2}	400	$м/с$
5	Скорость поперечной волны	c_s	1300	$м/с$
6	Пористость	d_0	0.1 (известняк слабый)	
7	Область интегрирования по оси x_1	R	7000	$м$
8	Область интегрирования по оси x_2	L	10500	$м$
9	Количество узлов по оси x_1	N_1	400	
10	Количество узлов по оси x_2	N_2	400	
11	Количество временных слоев	N_t	$5\cdot10^5$	
12	Шаг по оси x_1	h_1	$\frac{R}{N_1} = \frac{100}{400} = 0,25$	$м$
13	Шаг по оси x_2	h_2	$\frac{L}{N_2} = \frac{100}{400} = 0,25$	$м$
14	Шаг во времени	τ	$\frac{9\cdot10^{-5}h_1}{\sqrt{4200}} \approx 2.4303\cdot10^{-5}$	$с$

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5
15	Время распространения сигнала	T	2.43	c
16	Безразмерный параметр источника	γ	4	
17	Центральная частота источника	f_0	1	*Гц*
18	Длительность сигнала источника	t_0	1	c

Функция источника $F(t,x_1,x_2)=(F_1(t,x_1,x_2),F_2(t,x_1,x_2))$ описывается следующими формулами:

$$F_1(t,x_1,x_2)=f(t)\frac{\partial\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),\ F_2(t,x_1,x_2)=f(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\frac{\partial\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\partial x_2},$$

где

$$f(t)=\exp\left(-\frac{(2\pi f_0\cdot(t-t_0))^2}{\gamma^2}\right)\sin(2\pi f_0\cdot(t-t_0))\ \text{(импульс Пузырева)}$$

$$\mathbf{x}_0=(3500\ m,\,1500\ m)-\text{координаты источника}$$

Дельта–функция $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ и ее частные производные аппроксимируются аналогично тому, как это было в первом вычислительном эксперименте с использованием функции «шапочка».

~~функции~~Динамика изменения $f(t)$ ~~показан~~продемонстрирована на рисунке 16.

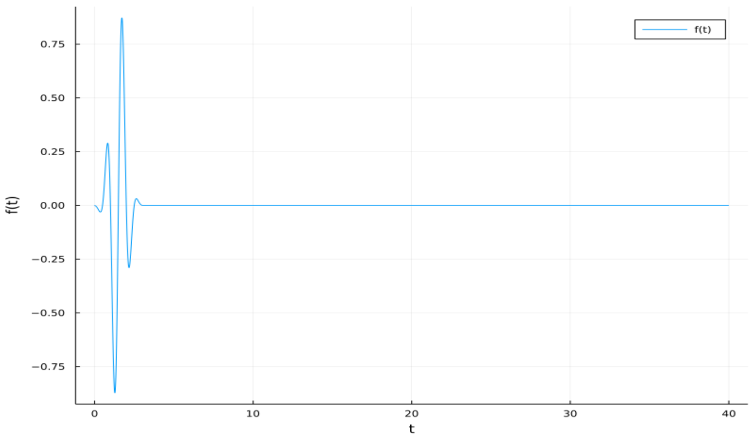
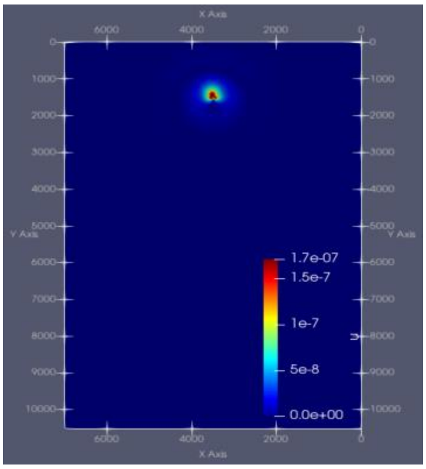
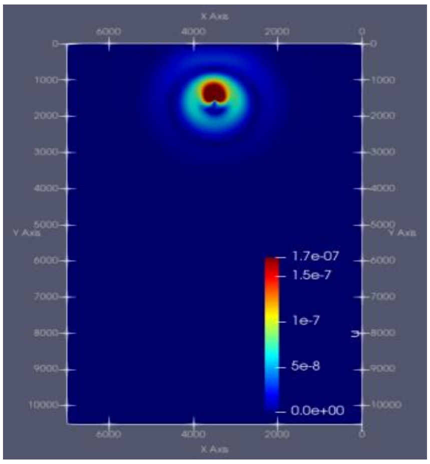


Рисунок 16 – Функция импульса $f(t)$

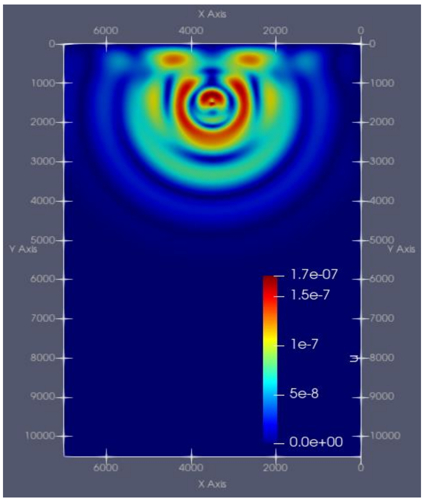
На рисунках 17 и 18 показана динамика изменения модулей векторов $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ и $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ от момента времени $t = 0.243c$ до $t = 2.43c$ через определенные промежутки времени.



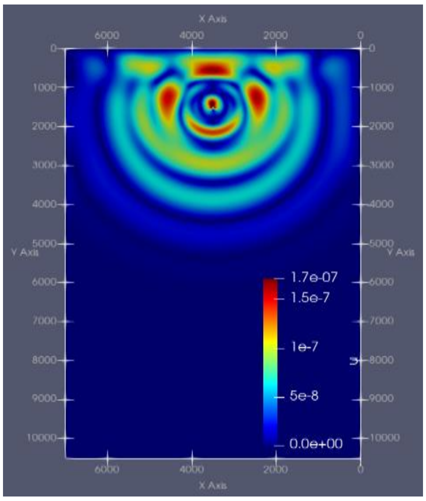
(a) $|\vec{u}(0.243, x_1, x_2)|$



(b) $|\vec{u}(1.22, x_1, x_2)|$

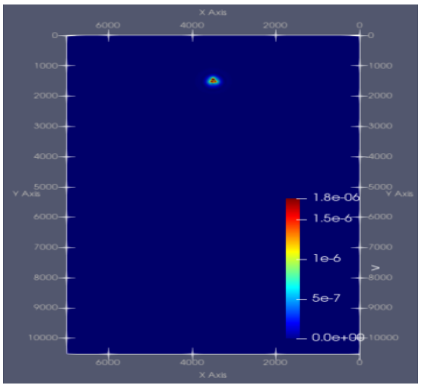


(c) $|\vec{u}(2.19, x_1, x_2)|$

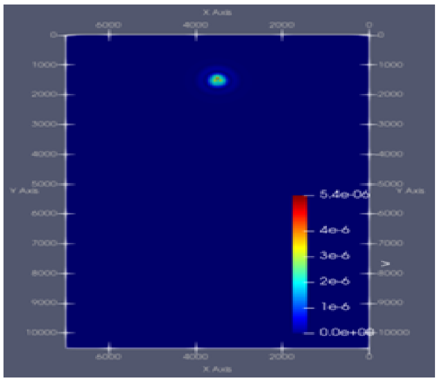


(d) $|\vec{u}(2.43, x_1, x_2)|$

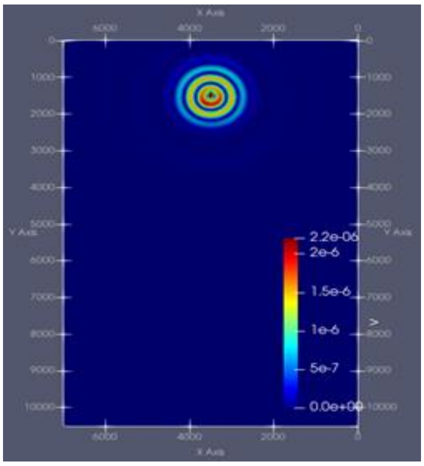
Рисунок 17 – График модуля скорости $|\vec{u}|$ твердой фазы во втором вычислительном эксперименте на интервалах времени: (a) $t = 0.243c$, (b) $t = 1.22c$, (c) $t = 2.19c$, (d) $t = 2.43c$



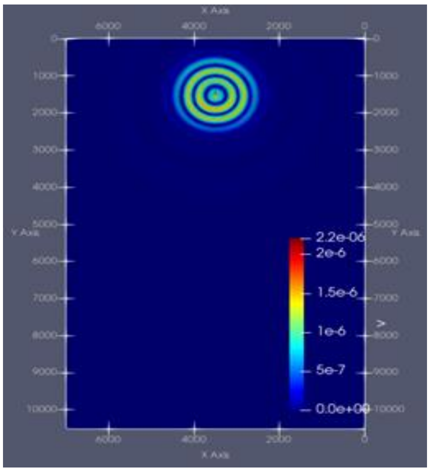
(a) $|\vec{v}(0.243, x_1, x_2)|$



(b) $|\vec{v}(1.22, x_1, x_2)|$



(c) $|\vec{v}(2.19, x_1, x_2)|$



(d) $|\vec{v}(2.43, x_1, x_2)|$

Рисунок 18 – График модуля скорости $|\vec{v}|$ жидкой фазы во втором вычислительном эксперименте на интервалах времени: (a) $t = 0.243c$, (b) $t = 1.22c$, (c) $t = 2.19c$, (d) $t = 2.43c$.

Сейсмограммы компонент $u_1(x_2, t)$ и $u_2(x_2, t)$ по трассам, проходящим через точку источника взрыва, выглядят аналогично сейсмограммам, показанным в первом вычислительном эксперименте.

Программный код, реализующий параллельные вычисления, разработан на высокопроизводительном языке программирования Julia. Возможность использования подхода продемонстрирована на примере решения задачи распространении сейсмических волн от источника взрыва, расположенного в пласте. Проведены вычислительные эксперименты на основе реальных данных по нефтяным пластам и получена динамическая визуализация решений, согласующаяся с моментами входа первых волн.

На основе полученного алгоритма построена имитационная модель, позволяющая проводить вычисления для любых реалистичных наборов исходных данных и вида функции источника. Схема комплекса программ с использованием языков программирования Html, Java Script и Python, Julia, обеспечивающего автоматический запуск вычислительного процесса, с возможностью ввода значений исходных данных и выбора вида функции источника приведена на рисунке 19. Дистанционный доступ пользователя к серверу обеспечивается через браузер по ссылке https://850b–37–228–66–82.ngrok–free.app/ru/dashboard

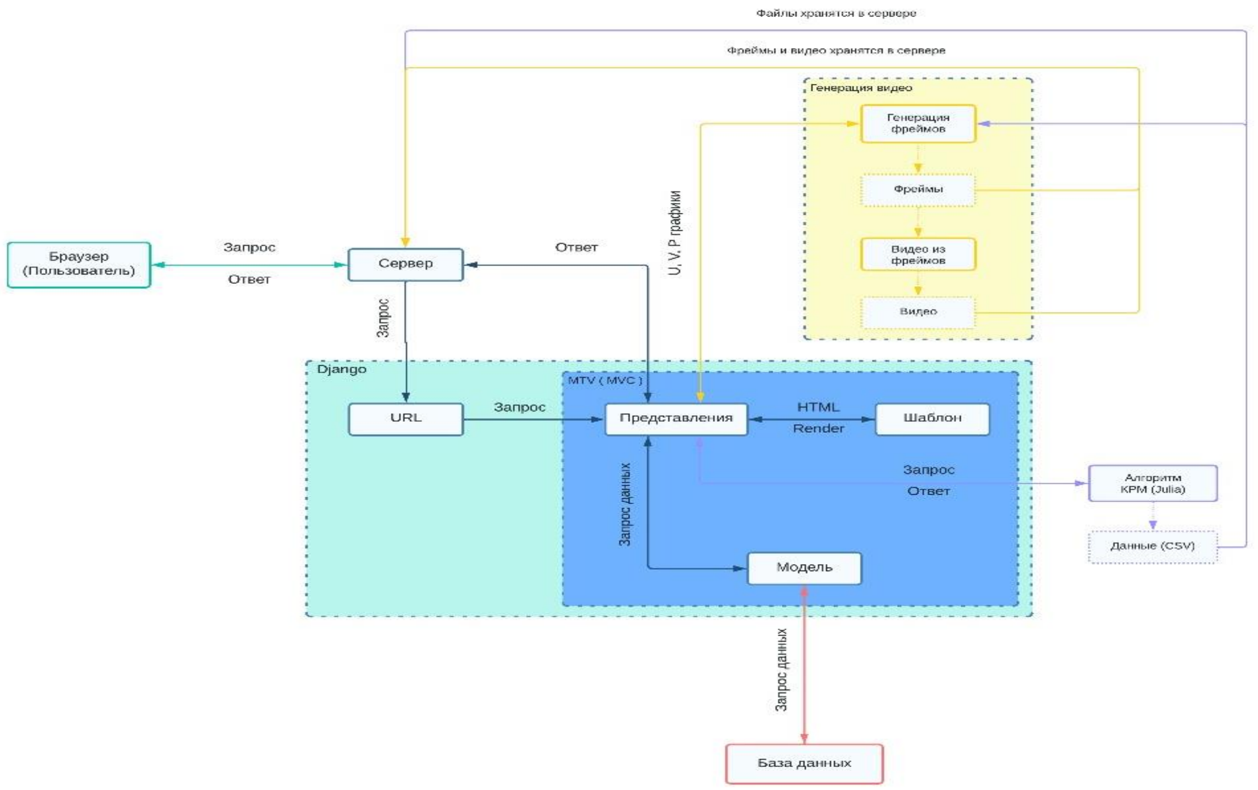


Рисунок 19 – Схема программного комплекса

Построен интерфейс с понятной и удобной для использования панелью управления на трех языках английском, казахском и русском с наглядной динамической визуализацией результатов вычисления. На дэшборде отображена информация о периоде времени, затрачиваемом на вычислительный процесс, а также промежутка времени, необходимо для генерации динамической визуализации каждой из вычисляемых функций, таких как модуль скорости движения частиц твердого каркаса $|\vec{u}|$, модуля скорости движения частиц насыщающей жидкости $|\vec{v}|$, а также порового давления p.

Дэшборд интерфейса имитационной модели для вычислительных экспериментов изображен на рисунке 20.

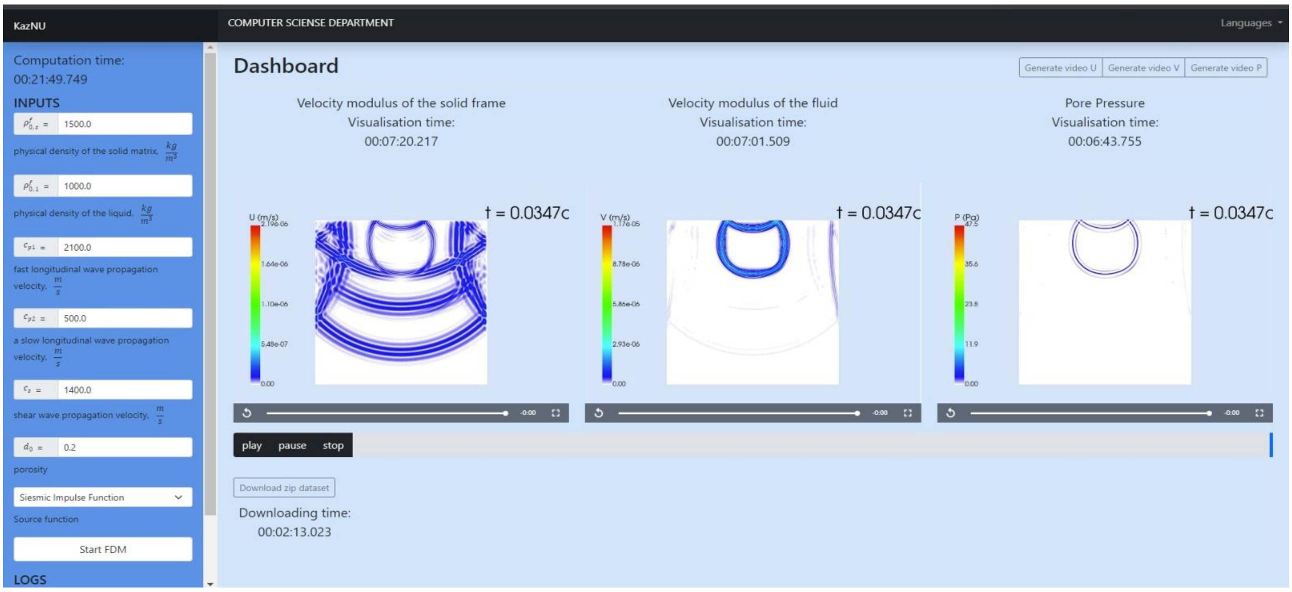


Рисунок 20 – Дэшборд интерфейса вычислительной задачи

Выводы по четвертому разделу

В данном разделе проведена численная реализация математической модели с помощью явной конечно–разностной противопоточной схемы на разнесенной сетке, разработанной в третьем разделе диссертации и подтверждена эффективность ее применения для имитационной модели, а именно:

– Проведено два численных эксперимента для различных реальных наборов исходных данных значений физических параметров пористой среды и скоростей продольных и поперечной волн, исходящих из источника. Код разработан на высокопроизводительном языке программирования Julia с использованием параллельных вычислений для сокращения вычислительного процесса.

– В вычислительных экспериментах были использованы два различных вида функций сейсмического импульса, имеющие реальный физический смысл и указанные в первом разделе диссертации с постановкой исходной задачи для математической модели, моделирующей распространение сейсмических волн в пороупругой среде.

– По результатам вычислений получена визуализация полученного решения скорости движения частиц твердого каркаса и насыщающей его жидкости в различные моменты времени после возникновения сейсмического импульса.

– Для удобного использования имитационной модели пороупругой среды разработан программный комплекс на языках HTML, Java Script, Python с интерфейсом для введения исходных значений параметров, автоматического запуска вычислений и получения динамической визуализации результатов вычислений функций решения, с указанием времени, затраченного на вычислительный процесс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной диссертации представлены исследования в теоретической и в практической части, связанные с численно–аналитическим решением начально–краевой задачи для симметричной t- гиперболической системы уравнений пороупругости. Эта задача обеспечивает основу для создания имитационной модели распространения сейсмических волн в пороупругой среде, насыщенной жидкостью. Параметры модели включают скорости распространения продольных и поперечных волн, физические плотности материалов среды и пористость твердого каркаса.

– В результате теоретических исследований подтверждена корректность постановки исходной задачи, получено условие разрешимости задачи, выполнение которого обеспечивает необходимое и достаточное условия существования единственного решения, получено аналитическое выражение решения в явном виде с помощью применения интегральных преобразований Фурье–Лапласа.

– Численное решение реализовано с использованием явной противопоточной конечно–разностной схемы, построенной на шахматной сетке с использованием параллельных вычислений. Использование метода разнесенных узлов разностной сетки позволило избежать осцилляций значений восьми функций решения для двумерного случая задачи. Подход континуальной фильтрации позволяет описывать пороупругую среду с меньшим числом модельных параметров, чем в теории пороупругости Френкеля–Био, и с лучшим согласованием результатов с экспериментальными данными.

– В диссертации представлен оригинальный алгоритм для компьютерного моделирования процессов распространения волн в сложных многофазных средах. Предлагаемый алгоритм позволяет эффективно использовать распараллеленные вычисления на современной компьютерной технике с многоядерными процессорами. Благодаря усовершенствованию высокопроизводительных современных вычислительных систем внедрение нового подхода к технологии компьютерного моделирования может сыграть решающую роль в области обработки и интерпретации данных и в других приложениях.

– Разработана имитационная модель с удобным интерфейсом с визуализацией результатов вычислений с использованием языков Html, Java Script и Python, позволяющий проводить численные эксперименты с полностью контролируемыми исходными данными и тем самым надежно проверять гипотезы и формулировать критерии проявления подвижности флюидов в сейсмических данных. Программный код, реализующий параллельные вычисления, разработан на высокопроизводительном языке программирования Julia.

– Устойчивость предложенной разностной схемы обеспечивается выполнением критерия Фридрихса–Куранта–Леви, определяющего соотношение между временными шагами и размером шагов по двум пространственным переменным. Проведены вычислительные эксперименты на реальных данных по нефтяным пластам и получена динамическая визуализация решений, согласующаяся с моментами прихода первых волн.

В настоящей диссертации детально раскрыта, как теоретическая часть, так и вычислительный метод с численными экспериментами, проведенными на основе различных наборов реальных данных физических параметров. Продемонстрирована эффективность разработанного алгоритма численного метода решения поставленной задачи пороупругости.

Таким образом, в диссертации представлен алгоритм численно–аналитического решения начально–краевой задачи для симметрической системы уравнений в частных производных t–гиперболического типа. Этот результат имеет важное промышленное применение. В частности, имитационное моделирование распространения сейсмических волн применяется для сейсморазведки, как наиболее надежный геофизический метод, используемый для выявления нефтегазоносных объектов в геологических структурах, а также решающее значение для исследований в различных областях, таких как биомедицина, химическая инженерия, микро– и нанофлюидика.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв.АН СССР. Сер.геогр. и геофиз. – 1944. – Т.8, № 4. – С. 133–150.

2 Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid–saturated porous solids // J. Acoustic. Soc. Amer. – 1956. – Vol.28. – P. 168 – 186.

3 Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation // Journal of Applied Physics. – 1941. – Vol.12, № 2. – P. 155–164.

4 Блиева Д.Н. Обзор исследований в области динамических уравнений пороупругости // Вестник КазНИТУ. – 2018. – №2. – С. 400–406.

5 Ковтун Ал.А. Об уравнениях модели Био и их модификациях // Вопросы геофизики. – СПб., 2012. – Вып. 44. – С. 3-26.

6 Tavakoli A., Ferronato M. On existence–uniqueness of the solution in a nonlinear Bio's model // Appl. Math. Inf. Sci. – 2013. – Vol.7, № 1. – P. 333–341.

7 Carcione J.M., Moreney C., Santos T.E. Computational poroelasticity – A review // GEOPHYSICS. – 2010. – Vol. 75, № 5. – P. 75A229–75A243.

8 Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика: сб. пер и обзор иностр. литер. – 1963. – № 6. – С.103–134.

9 Visualization of simulated flow through porous media // Lousiana State University PoreSim Research Consortium in collaboration with Center for Computational Technology. –2012. -FullHD https://video/preview/9886452130028727161 (16-01-2024)

10 Борисенко А.Н., Тарасов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного вычисления. – М.: Высшая школа, 1966. – 250 с.

11 Колесов А.Е. Численное моделирование проблем пороупругости: дисс. ... к.ф.–м.н. – Северо–Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, МОН РФ. – Якутск, 2015. –124 с.

12 Муртазина Т.М., Анисимова Л.З., Фахрутдинов И.Р. Влияние разработки месторождений со сверхвязкими нефтями, с нетрадиционными запасами и природных битумов на экологию // Экспозиция нефть газ, 5 (72), - 2019, С. 83-84

13 Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustics propagation in porous media // J. Appl. Mech. – 1961. – Vol. 23. – P. 1482 – 1498.

14 Aki K., Richards P.G. Quantitative Seismology: Theory and methods. – San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1980. – Vol.1

15 Aziz K., Settati A. Petroleum Reservoir Simulations // Appl. Sci. Publishers Ltd.- London – 1979. – 491p

16 Berryman J.G. Confirmation of Biot's theory // Applied Physical Letters. – 1980. – Vol. 37. – P. 382–384.

17 Biondi B., Lumley D., Mavko G., Mukerji T., Rickett J., Deutsch G., Gundeso R., and Thiele M. // Reservoir monitoring: A multi–disciplinary feasibility study // Stanford Rock Physics Project. – 1996. – Vol. 17(10). – P. 1775–1778.

18 Wave propagation in an hydrocarbon reservoir during exploitation : A preliminary, integrated study. // Engineering, Environmental Science, Geology – 2007. – Corpus ID:1306641

19 Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. – М.: Недра, 1970. – 339 с.

20 Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика с приложениями к проблемам газовых и нефтяных пластов. – М.: Недра, 1996. – 447 с.

21 Wang H.F. Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology. – Princeton University Pres, 2000. – 286 p.

22 Meirmanov A. Mathematical Models for Poroelastic Flows. — Berlin: Springer, 2014. – Vol. 1. – 449 p.

23 Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – 2–е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

24 Tolstoy Ivan Obituary: Maurice A. Biot // Physics Today. – 1986. – Vol. 39(5). – P. 104–106. DOI:10.1063/1.2815015

25 Zimmerman R.W. Compressibility of sandstones // Developments in Petroleum Science. – 1990. – Vol. 29. – 173 p.

26 Santos J.E., Corbero J.M., Ravazzoli C.L., Hensley J.L. Reflection and transmission coefficients in fluid–saturated porous media // J. Acoust. Soc. Am. – 1992. – Vol.91. – P. 1911–1923.

27 Azi B.–Menahem, Gibson R. Directional attenuation of SH waves in anisotropic poroelastic inhomogeneous media // J. Acoust. Soc. Amer. – 1993. – Vol.93, №6. – P. 3057–3065.

28 Berryman J.G. Comparison of Upscaling Methods in Poroelasticity and its Generalizations // Journal of engineering mechanics. – 2005. – Vol. 131, № 9. – P. 928–936.

29 Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. –1993. – №1. – С. 100–111.

30 Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А. Использование спектрального метода Лагерра для решения линейной двумерной динамической задачи для пористых сред // Сиб. журнал индустр. матем. – 2008. – Т.11, № 3. – http://www.mathnet.ru/php/contents.phtml?wshow=issue&jrnid=sjim&year=2008&volume=11&issue=3&series=0&option_lang=rus С. 86–95.

31 Berdyshev A., Imomnazarov Kh., Tang J–G, Mikhailov A. The Laguerre spectral method as applied to numerical solution of a two−dimensional linear dynamic seismic problem for porous media // De Gruyter Open Computer Science. – 2016. – Vol. 6(1). – P. 208–212.

32 Konyukh G.V., Mikhailenko B.G. Application of integral Laguerre transformation for solving dynamic seismic problem // Bull. Novosibirsk Comput. Center. Ser. Math. Modeling in Geophysics. – 1998. – № 4. – P. 79–91.

33 Mikhailenko B.G. Spectral Laguerre Method for the Approximate Solution of Time Dependent Problems // Applied Mathematics Letters. –1998. – Vol. 12, № 4. –P. 105–110.

34 Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical Modeling of Transient Seismic Fields in Viscoelastic Media Based on the Laguerre Spectral Method // Pure and applied geophysics. –2003. – Vol.160. – P. 1207–1224.

35 Бердышев А.С., Имомназаров Х.Х. Прямые и обратные задачи для системы уравнений теории двухскоростного континуума МОН РК / КазНПУ имени Абая, ИИКТ. – Алматы, 2017. – 153 с.

36 Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum // Nova Sci. – New York, 1995. – 181p.

37 Отчет о научно-исследовательской работе «Математическое моделирование динамики упруго-деформируемых пористых сред с учетом частотной зависимости коэффициента трения (с памятью) (заключительный) AP051321026, РГП ИИВТ МОН РК, Алматы, -2020, 94с.

38 Berdyshev A.S., Aloev R.D., Bliyeva D.N., Dadabayev S., Baishemirov Zh. Stability Analysis of an Upwind Difference Splitting Scheme for Two–Dimensional Saint–Venant Equations //Symmetry Open Access Journal by MDPI. – 2022. – Vol.14(10). – 1986. doi:10.3390/sym14101986

39 Bliyeva D., Baigereyev D., Imomnazarov Kh. Computer Simulation of the Seismic Wave Propagation in Poroelastic Medium // Symmetry Open Access Journal by MDPI. – 2022. – Vol. 14, issue 8. – 1516. doi: https://doi.org/10.3390/sym14081516

40 Berdyshev A.S., Abdiramanov Zh.A., Akhtaeva N.S., Bliyeva D.N. A brief overview of modern research of the processes dynamics in unsteady water flows using the shallow water equation // JMMCS. – 2021. – Vol.4(112). – P. 170–180. doi: https://doi.org/10.26577/JMMCS.2021.v112.i4.15

41 Бердышев А.С., Блиева Д.Н. Об одном методе исследования математической модели динамической системы уравнений пороупругости // Вестник КазНИТУ им.Сатпаева. – 2019. – № 3. – С. 527–533.

42 Блиева Д.Н., Фархадов Т. Численная реализация аналитического решения начально–краевой задачи для системы уравнений динамической пороупругости // Вестник КБТУ. – 2020. – №3. – С. 125–130.

43 Блиева Д.Н. Применение спектрального метода для решения динамических уравнений теории упругости // Сборник статей XV Междун. науч.–практ. конф. «Российская наука в современном мире». – М., 2018. – Ч. 1. – С.75–79. ISBN 978–5–6041034–1–8

44 Бердышев А.С., Блиева Д.Н. Применение преобразования Лапласа для сведения уравнений пороупругости к эллиптической системе уравнений // Научная конференция Института информационных и вычислительных технологий МОН РК «Современные проблемы информатики и вычислительных технологий». – Алматы, 2018. – С.80–83.

45 Imomnazarov Kh.Kh., Berdyshev A.S., Bliyeva D.N. Numerical diagnostics of destruction of the blow–up solution of the initial boundary value problem arising in the incompressible two–velocity medium equation // Inernational Scientific and Practical Conference «Modern world economy: problems and prospects in the era of the development of digital technologies and biotechnology». – 2019. – P.109–115.

46 Imomnazarov Kh.Kh., Berdyshev A.S., Bliyeva D.N. Simulation of the seismic wave propagation in porous media described by three elastic parameters // Thesis at the I Conference on Transfer between Mathematics and Industry (CTMI 2019). – Santiago de Compostela, Spain http://www.itmati.com/ctmi2019/sites/itmati.com.ctmi2019/files/C01–2vdef.pdf

47 Berdyshev A.C., Bliyeva D.N. Construction of fundamental system for numeric and analytical solution of dynamic poroelasticity problem // Proceedings of the International Scientific Conference «Inverse problems in finance, economics and life sciences». – Almaty, 2019. – P. 5–12.

48 Berdyshev A.C., Bliyeva D.N. Construction of fundamental solution system for dynamic poroelasticity problem using Laplace–Fourier transform // Матер. IV Междун. науч.–практ. конф. «Информатика и прикладная математика», посвященной 70–летнему юбилею профессоров Биярова Т.Н., Вальдемара Вуйцика и 60–летию профессора Амиргалиева Е.Н. – Алматы, 2019. – P.23–31.

49 Бердышев А.С., Блиева Д.Н. Построение фундаментального решения системы уравнений динамической пороупругости // Матер. научн. конф. ИИВТ МОН РК «Современные проблемы информатики и вычислительных технологий» по результатам НИР по ГФ и ПЦФ за первое полугодие 2020 года. – Алматы, 2020. – С. 99–105.

50 Бердышев А.С., Блиева Д.Н. Компьютерное моделирование численно–аналитического решения динамической задачи пороупругости // Матер. V Междун. науч.–практ. конф. «Информатика и прикладная математика». – Алматы, 2020. – С. 203 – 211. ISBN 978–601–332–384–8

51 Годунов С.К. Уравнения математической физики. – Изд. 2–ое испр. и доп. – М.: Наука, 1979. – 391 с.

52 Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. – Изд. 2–ое. – М.: Гос.издательство математической литературы, 1961. – 433 с.

53 Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2014. – 480 с.

54 Сорокин К.Э., Имомназаров Х.Х. Численное решение линейной двумерной динамической задачи для пористых сред // Journal of Siberian Federal University. Mathematics&Physics. – 2010. – Т. 3(2). – С. 256–261.

55 Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А. Применение спектрального метода для численного моделирования распространения сейсмических волн в пористых средах при наличии диссимации энергии // Сиб. журн. вычислительной математики. –2014. – Т.17, №3. – С. 139–147.

56 Волков К.Н. Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительные методы и программирования. – 2005. – Т. 6. – С. 269–282.

57 Peskin C.S. The immersed boundary method //Acta Numerica. – 2002. – Vol.11. – P. 479–517. DOI: 10.1017/S0962492902000077

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код на MatLab для вычисления матриц и собственных значений

Description: This script computes the matrices, the eigenvalues and the eigenvectors associated to the problem in symbolic form
Author: Francisco Javier Fernandez Fernandez/Dana Bliyeva
ANALYTICAL SOLUTION OF THE DYNAMIC POROELASTICITY PROBLEM USING LAPLACE–FOURIER TRANSFORMS. RESOLVABILITY CONDITIONS

Some initializations

```
format short e
```

We declare the symbolic variables

```
syms d0
syms rho_lf
syms rho_sf
syms cp1
syms cp2
syms cs
syms mu
syms rho_l
syms rho0
syms K
syms s
syms rho_s
syms k1
syms alpha
syms Fhat_1
syms Fhat_2
```

We introduce the matrix A

```
A=[mu, 0, 0, 0, 0, 0;...
   0, rho_s*K/rho0+4*mu/3, –rho_s*K/rho0, 0, 0, 0;...
   0,  K–alpha*rho_s/rho0, –alpha*rho_l/rho0, 0, 0, 0;...
   0, (rho_s*K/rho0–2*mu/3)/s, –rho_s*K/s/rho0, –1/(1i*k1), 0, 0;...
   0, 0, 0, 0, 1/rho_s, 1/rho0;...
   0, 0, 0, 0, 0, 1/rho0]
```

A =

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\,\mu}{3}+\frac{K\,\rho_s}{\rho_0} & -\frac{K\,\rho_s}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K-\frac{\alpha\,\rho_s}{\rho_0} & -\frac{\alpha\,\rho_l}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\frac{2\,\mu}{3}-\frac{K\,\rho_s}{\rho_0}}{s} & -\frac{K\,\rho_s}{\rho_0\,s} & \frac{\mathrm{i}}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_s} & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \end{pmatrix}$$

A =

We introduce matrix B

```
B = [0, mu*1i*k1, 0, s, 0, 0;...
   (rho_s*K/rho0–2*mu/3)*1i*k1, 0, 0, 0, s, –rho_s*K*k1^2/s/rho0^2;...
    (K–alpha*rho_s/rho0)*1i*k1, 0, 0, 0, 0, –(alpha*rho_l*k1^2/s/rho0–s);...
   (rho_s*K/rho0+4*mu/3+s^2*rho_s/k1^2)*1i*k1/s, 0, 0, 0, 0, –
rho_s*(K*k1^2/s^2/rho0+1)/rho0;...
   0, s, 0, 1i*k1/rho_s, 0, 0;...
   0, 0, s, 0, 0, 0]
```

B =

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1\,\mu\,\mathrm{i} & 0 & s & 0 & 0 \\ -k_1\left(\frac{2\,\mu\,\mathrm{i}}{3}-\sigma_1\right) & 0 & 0 & 0 & s & -\frac{K\,{k_1}^2\,\rho_s}{{\rho_0}^2\,s} \\ k_1\left(K\,\mathrm{i}-\frac{\alpha\,\rho_s\,\mathrm{i}}{\rho_0}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & s-\frac{\alpha\,{k_1}^2\,\rho_l}{\rho_0\,s} \\ \frac{k_1\left(\frac{4\,\mu\,\mathrm{i}}{3}+\frac{\rho_s\,s^2\,\mathrm{i}}{{k_1}^2}+\sigma_1\right)}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_s\left(\frac{K\,{k_1}^2}{\rho_0\,s^2}+1\right)}{\rho_0} \\ 0 & s & 0 & \frac{k_1\,\mathrm{i}}{\rho_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{K\,\rho_s\,\mathrm{i}}{\rho_0}$$

We introduce matrix C

```
C = [0;...
   rho_s*K*1i*k1*Fhat_1/(s*rho0);...
   alpha*rho_l*1i*k1*Fhat_1/s/rho0;...
   rho_s*(K*1i*k1/s^2–rho0/1i/k1)*Fhat_1/rho0;...
```

```
   Fhat_2;...
   Fhat_2]
```

C =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\text{Fhat}_1\, K\, k_1\, \rho_s\, \mathrm{i}}{\rho_0\, s} \\ \frac{\text{Fhat}_1\, \alpha\, k_1\, \rho_l\, \mathrm{i}}{\rho_0\, s} \\ \frac{\text{Fhat}_1\, \rho_s \left(\frac{\rho_0\, \mathrm{i}}{k_1} + \frac{K\, k_1\, \mathrm{i}}{s^2}\right)}{\rho_0} \\ \text{Fhat}_2 \\ \text{Fhat}_2 \end{pmatrix}$$

We compute the inverse of matrix A^–1

```
Ainv=inv(A);
Ainv=simplify(Ainv)
```

Ainv =

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\,\alpha\,\rho_0\,\rho_l}{\sigma_1} & -\frac{3\,K\,\rho_0\,\rho_s}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\,\rho_0\,(K\,\rho_0 - \alpha\,\rho_s)}{\sigma_1} & -\frac{\rho_0\,(3\,K\,\rho_s + 4\,\mu\,\rho_0)}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_1\,(-\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 - 2\,\alpha\,\mu\,\rho_0\,\rho_l)\,\mathrm{i}}{s\,\sigma_1} & \frac{6\,K\,k_1\,\mu\,\rho_0\,\rho_s\,\mathrm{i}}{s\,\sigma_1} & -k_1\,\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_s & -\rho_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = -\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + 4\,\alpha\,\mu\,\rho_0\,\rho_l$$

$$\sigma_2 = 3\,\rho_0\,K^2\,\rho_s$$

$$\sigma_3 = 3\,\alpha\,K\,\rho_s^2$$

$$\sigma_4 = 3\,\alpha\,\rho_l\,K\,\rho_s$$

Ainv =

We calculate the matrix B1 of the cononical form of the system:

```
B1 = Ainv*B
```

B1 =

$$
\left(\begin{array}{cccccc}
0 & k_1\,\mathrm{i} & 0 & \frac{s}{\mu} & 0 & 0 \\
\frac{k_1\,\left(-3\,\mathrm{i}\,\rho_0\,K^2\,\rho_s+3\,\mathrm{i}\,\alpha\,K\,{\rho_s}^2+3\,\mathrm{i}\,\alpha\,\rho_l\,K\,\rho_s-2\,\alpha\,\mu\,\rho_0\,\rho_l\,\mathrm{i}\right)}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\,\alpha\,\rho_0\,\rho_l\,s}{\sigma_1} & -\frac{3\,K\,\rho_s\,\left(-\alpha\,\rho_l\,{k_1}^2\,\rho_0+\alpha\,\rho_l\,{k_1}^2+{\rho_0}^2\,s^2\right)}{\rho_0\,s\,\sigma_1} \\
-\frac{6\,k_1\,\mu\,\rho_0\,\left(K\,\rho_0\,\mathrm{i}-\alpha\,\rho_s\,\mathrm{i}\right)}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\,\rho_0\,s\,\left(K\,\rho_0-\alpha\,\rho_s\right)}{\sigma_1} & -\frac{3\,K^2\,{k_1}^2\,\rho_0\,\rho_s-3\,\alpha\,\rho_l\,K\,{k_1}^2\,\rho_0\,\rho_s-3\,\alpha\,K\,{k_1}^2\,{\rho_s}^2+3\,K\,{\rho_0}^2\,\rho_s\,s^2-4\,\alpha\,\mu\,\rho_l\,{k_1}^2\,{\rho_0}^2+4\,\mu\,{\rho_0}^3\,s^2}{\rho_0\,s\,\sigma_1} \\
\frac{-12\,\rho_0\,K^2\,{k_1}^2\,\mu\,\rho_s-3\,\rho_0\,K^2\,{\rho_s}^2\,s^2+12\,\alpha\,K\,{k_1}^2\,\mu\,{\rho_s}^2+12\,\alpha\,\rho_l\,K\,{k_1}^2\,\mu\,\rho_s+3\,\alpha\,K\,{\rho_s}^3\,s^2+3\,\alpha\,\rho_l\,K\,{\rho_s}^2\,s^2+4\,\alpha\,\rho_0\,\rho_l\,{k_1}^2\,\mu^2+4\,\alpha\,\rho_0\,\rho_l\,\mu\,\rho_s\,s^2}{s\,\sigma_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{k_1\,\left(-\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4-2\,\alpha\,\mu\,\rho_0\,\rho_l\right)\,\mathrm{i}}{\sigma_1} & \frac{k_1\,\rho_s\,\left(-3\,K^2\,\rho_0\,\rho_s\,s^2\,\mathrm{i}-6\,\mathrm{i}\,\alpha\,\mu\,\rho_l\,K\,{k_1}^2\,\rho_0+6\,\mathrm{i}\,\alpha\,\mu\,\rho_l\,K\,{k_1}^2+6\,\mathrm{i}\,\mu\,K\,{\rho_0}^2\,s^2+3\,\mathrm{i}\,\alpha\,K\,{\rho_s}^2\,s^2+3\,\mathrm{i}\,\alpha\,\rho_l\,K\,\rho_s\,s^2+4\,\mathrm{i}\,\alpha\,\mu\,\rho_l\,\rho_0\,s^2\right)}{\rho_0\,s^2\,\sigma_1} \\
0 & \rho_s\,s & -\rho_s\,s & k_1\,\mathrm{i} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho_0\,s & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

where

$\sigma_1 = -\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+4\,\alpha\,\mu\,\rho_0\,\rho_l$

$\sigma_2 = 3\,\rho_0\,K^2\,\rho_s$

$\sigma_3 = 3\,\alpha\,K\,{\rho_s}^2$

$\sigma_4 = 3\,\alpha\,\rho_l\,K\,\rho_s$

$$
\left(\begin{array}{cccccc}
0 & k_1\,\mathrm{i} & 0 & \frac{s}{\mu} & 0 & 0 \\
-\frac{3\,K\,k_1\,\rho_0\,\rho_s\,\sigma_2}{\sigma_5}-\frac{3\,\alpha\,k_1\,\rho_0\,\rho_l\,\sigma_7}{\sigma_5} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\,\alpha\,\rho_0\,\rho_l\,s}{\sigma_5} & -\frac{3\,K\,\rho_0\,\rho_s\,\sigma_1}{\sigma_5}-\frac{3\,K\,\alpha\,{k_1}^2\,\rho_l\,\rho_s}{\rho_0\,s\,\sigma_5} \\
-\frac{3\,k_1\,\rho_0\,\sigma_7\,\sigma_3}{\sigma_5}-\frac{k_1\,\rho_0\,\sigma_2\,\sigma_4}{\sigma_5} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\,\rho_0\,s\,\sigma_3}{\sigma_5} & -\frac{\rho_0\,\sigma_1\,\sigma_4}{\sigma_5}-\frac{3\,K\,{k_1}^2\,\rho_s\,\sigma_3}{\rho_0\,s\,\sigma_5} \\
-\frac{{k_1}^2\,\left(\frac{4\,\mu\,\mathrm{i}}{3}+\frac{\rho_s\,s^2\,\mathrm{i}}{{k_1}^2}+\sigma_{11}\right)\,\mathrm{i}}{s}-\frac{{k_1}^2\,\sigma_7\,\sigma_6\,\mathrm{i}}{s\,\sigma_5}+\frac{6\,K\,{k_1}^2\,\mu\,\rho_0\,\rho_s\,\sigma_2\,\mathrm{i}}{s\,\sigma_5} & 0 & 0 & 0 & \frac{k_1\,\sigma_6\,\mathrm{i}}{\sigma_5} & \frac{k_1\,\rho_s\,\left(\frac{K\,{k_1}^2}{\rho_0\,s^2}+1\right)\,\mathrm{i}}{\rho_0}-\frac{K\,{k_1}^3\,\rho_s\,\sigma_6\,\mathrm{i}}{{\rho_0}^2\,s^2\,\sigma_5}+\frac{6\,K\,k_1\,\mu\,\rho_0\,\rho_s\,\sigma_1\,\mathrm{i}}{s\,\sigma_5} \\
0 & \rho_s\,s & -\rho_s\,s & k_1\,\mathrm{i} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho_0\,s & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

where

$\sigma_1 = s-\frac{\alpha\,{k_1}^2\,\rho_l}{\rho_0\,s}$

$\sigma_2 = K\,\mathrm{i}-\frac{\alpha\,\rho_s\,\mathrm{i}}{\rho_0}$

$\sigma_3 = K\,\rho_0-\alpha\,\rho_s$

$\sigma_4 = 3\,K\,\rho_s+4\,\mu\,\rho_0$

$\sigma_5 = -\sigma_8+\sigma_9+\sigma_{10}+4\,\alpha\,\mu\,\rho_0\,\rho_l$

$\sigma_6 = -\sigma_8+\sigma_9+\sigma_{10}-2\,\alpha\,\mu\,\rho_0\,\rho_l$

$\sigma_7 = \frac{2\,\mu\,\mathrm{i}}{3}-\sigma_{11}$

$\sigma_8 = 3\,\rho_0\,K^2\,\rho_s$

$\sigma_9 = 3\,\alpha\,K\,{\rho_s}^2$

$\sigma_{10} = 3\,\alpha\,\rho_l\,K\,\rho_s$

$\sigma_{11} = \frac{K\,\rho_s\,\mathrm{i}}{\rho_0}$

B1 =

```
simplify(B1)
```

ans =

ans =

We calculate the matrix C1 of the cononical form

```
C1 = Ainv*C
```

C1 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\mathrm{Fhat}_1\,\alpha\,k_1\,\rho_l\,(3\,K\,\rho_s+4\,\mu\,\rho_0)\,\mathrm{i}}{s\,\sigma_1}+\frac{3\,\mathrm{Fhat}_1\,K\,k_1\,\rho_s\,(K\,\rho_0-\alpha\,\rho_s)\,\mathrm{i}}{s\,\sigma_1} \\ -\frac{\mathrm{Fhat}_1\,K\,{k_1}^2\,\rho_s\,(-\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4-2\,\alpha\,\mu\,\rho_0\,\rho_l)}{\rho_0\,s^2\,\sigma_1}-\frac{6\,\mathrm{Fhat}_1\,K\,\alpha\,{k_1}^2\,\mu\,\rho_l\,\rho_s}{s^2\,\sigma_1}-\frac{\mathrm{Fhat}_1\,k_1\,\rho_s\,\left(\frac{\rho_0\,\mathrm{i}}{k_1}+\frac{K\,k_1\,\mathrm{i}}{s^2}\right)\,\mathrm{i}}{\rho_0} \\ 0 \\ \mathrm{Fhat}_2\,\rho_0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1=-\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+4\,\alpha\,\mu\,\rho_0\,\rho_l$$

$$\sigma_2=3\,\rho_0\,K^2\,\rho_s$$

$$\sigma_3=3\,\alpha\,K\,{\rho_s}^2$$

$$\sigma_4=3\,\alpha\,\rho_l\,K\,\rho_s$$

C1 =

Partial density of porous medium

```
rho_s=rho_sf*(1–d0);
```

Partial density of liquid medium

```
rho_l=rho_lf*d0;
```

Density

```
rho0=rho_s+rho_l;
```

We introduce formulas for parameters K, mu,

```
K=(rho0/2)*(rho_s/rho_l)*(cp1^2+cp2^2–(8/3)*(rho_l/rho0)*cs^2–...
   sqrt((cp1^2–cp2^2)^2–(64/9)*(rho_l*rho_s/rho0^2)*cs^4));
% 3rd elastic module of Dorovsky model:
gamma=rho0/2*(cp1^2+cp2^2–(8/3)*(rho_s/rho0)*cs^2+...
   sqrt((cp1^2–cp2^2)^2–(64/9)*(rho_l*rho_s/rho0^2)*cs^4));
```

Bulk compression modulus of the liquid componenent of heterophase medium

```
alpha=gamma+K
```

alpha =

$$\sigma_2\left(\sigma_1+\mathrm{cp}_1{}^2+\mathrm{cp}_2{}^2+\frac{8\,\mathrm{cs}^2\,\rho_{\mathrm{sf}}\,(d_0-1)}{\sigma_3}\right)+\frac{\rho_{\mathrm{sf}}\,\sigma_2\,(d_0-1)\,\left(\sigma_1-\mathrm{cp}_1{}^2-\mathrm{cp}_2{}^2+\frac{8\,\mathrm{cs}^2\,d_0\,\rho_{\mathrm{lf}}}{\sigma_3}\right)}{d_0\,\rho_{\mathrm{lf}}}$$

where

$$\sigma_1=\sqrt{\left(\mathrm{cp}_1{}^2-\mathrm{cp}_2{}^2\right)^2+\frac{64\,\mathrm{cs}^4\,d_0\,\rho_{\mathrm{lf}}\,\rho_{\mathrm{sf}}\,(d_0-1)}{9\,(d_0\,\rho_{\mathrm{lf}}-\rho_{\mathrm{sf}}\,(d_0-1))^2}}$$

$$\sigma_2=\frac{d_0\,\rho_{\mathrm{lf}}}{2}-\frac{\rho_{\mathrm{sf}}\,(d_0-1)}{2}$$

$$\sigma_3=3\,(d_0\,\rho_{\mathrm{lf}}-\rho_{\mathrm{sf}}\,(d_0-1))$$

alpha =

1st elastic module of Dorovsky model:

```
mu=rho_s*cs^2;
```

We compute the eigenvalues of matrix B1

```
tau=eig(B1)
```

tau =

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_3 \\ \sigma_2 \\ -\sigma_1 \\ -\sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\mu\, {k_1}^2 + \rho_s\, s^2}{\mu}}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{14} - \sigma_4 - \sigma_8 - \sigma_7 + \sigma_{10} + \sigma_6 + \sigma_{13} + \sigma_{15} + \sigma_{12} + \sigma_9}{\sigma_5}}$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{\sigma_4 - \sigma_{14} + \sigma_{11} - \sigma_8 - \sigma_7 + \sigma_{10} + \sigma_6 + \sigma_{13} + \sigma_{15} + \sigma_{12} + \sigma_9}{\sigma_5}}$$

$$\sigma_4 = \sqrt{9\, K^2\, \alpha^2\, {k_1}^4\, {\rho_0}^2\, {\rho_l}^2\, {\rho_s}^2 - 18\, K^2\, \alpha^2\, {k_1}^4\, \rho_0\, {\rho_l}^2\, {\rho_s}^2 + 9\, K^2\, \alpha^2\, {k_1}^4\, {\rho_l}^2\, {\rho_s}^2 + 24\, K\, \alpha^2\, {k_1}^4\, \mu\, {\rho_0}^3\, {\rho_l}^2\, \rho_s - 48\, K\, \alpha^2\, {k_1}^4\, \mu\, {\rho_0}^2\, {\rho_l}^2\, \rho_s + 24\, K\, \alpha}$$

$$\sigma_5 = 2\, \left(-3\, \rho_0\, K^2\, \rho_s + 3\, \alpha\, K\, {\rho_s}^2 + 3\, \alpha\, \rho_l\, K\, \rho_s + 4\, \alpha\, \mu\, \rho_0\, \rho_l\right)$$

$$\sigma_6 = 4\, \alpha\, {k_1}^2\, \mu\, {\rho_0}^2\, \rho_l$$

$$\sigma_7 = 6\, K\, {\rho_0}^2\, \rho_s\, s^2$$

$$\sigma_8 = 6\, K^2\, {k_1}^2\, \rho_0\, \rho_s$$

$$\sigma_9 = 3\, K\, \alpha\, {k_1}^2\, \rho_0\, \rho_l\, \rho_s$$

$$\sigma_{10} = 3\, \alpha\, \rho_0\, {\rho_s}^2\, s^2$$

$$\sigma_{11} = 6\, K\, \alpha\, {k_1}^2\, {\rho_s}^2$$

$$\sigma_{12} = 3\, \alpha\, \rho_0\, \rho_l\, \rho_s\, s^2$$

$$\sigma_{13} = 3\, K\, \alpha\, {k_1}^2\, \rho_l\, \rho_s$$

$$\sigma_{14} = 4\, \mu\, {\rho_0}^3\, s^2$$

$$\sigma_{15} = 4\, \alpha\, {k_1}^2\, \mu\, \rho_0\, \rho_l$$

tau =

We compute the eigenvectors

```
v1=null(B1–tau(1)*eye(6));
v2=null(B1–tau(2)*eye(6));
v3=null(B1–tau(3)*eye(6));
v4=null(B1–tau(4)*eye(6));
```

```
v5=null(B1–tau(5)*eye(6));
v6=null(B1–tau(6)*eye(6));
P=[v1 v2 v3 v4 v5 v6];
```

We calculate the matrix to obtain the coefficients

```
 Q=rref([P,eye(6)]);
R=Q(1:3,7:9);
R=simplify(R)
```

R =

```
[P,J,P1]=svd(B1);
J=simplify(J)
P=simplify(P)
P1=simplify(P1)
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Код программного комплекса для моделирования процесса распространения акустических волн во флюидонасыщенной пористой среде на языке программирования Julia выглядеть следующим образом:

```
using OffsetArrays
using Base.Threads

#-----------------------------------------------------------
# Given
#-----------------------------------------------------------
# Domain
const Ax₁, Bx₁ = 0.0, 100.0
const Ax₂, Bx₂ = 0.0, 100.0
const At, Bt = 0.0, 1.0

const L₁, L₂ = 15.0, 75.0

# Mesh
const Nx₁, Nx₂ = 400, 400
const LastTimeLayer = 100000

# Media properties
const ρ₀sf_porous = 1500.0
const ρ₀lf_porous = 1000.0
const cp₁_porous = 2000.0
const cp₂_porous = 450.0
const cs_porous = 1400.0
const d₀_porous = 0.2

const ρ₀sf_elast = 1200.0
const cp₁_elast = 1400.0
const cs_elast = 1300.0

const h₁, h₂ = (Bx₁ - Ax₁) / Nx₁, (Bx₂ - Ax₂) / Nx₂
const Nl = 20.0
const γ = 4.0
```

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia
const γ = 4.0
const f₀ = cs_porous / (h₁ * Nl)
const t₀ = 1.0 / f₀
const τ = 0.00009 * h₁ / sqrt(2.0 * cp₁_porous)
const x₁₀, x₂₀ = 50.0, 14.0

function f(t::Float64)
    if t <= 2.0 * t₀
        -2.0 * π^2.0 * f₀^2.0 * (t-t₀) * exp(-π^2.0 * f₀^2.0 * (t-t₀)^2.0
    else
        0.0
    end
end

#-----------------------------------------------------------
# Arrays
#-----------------------------------------------------------
const ρ₀sf = zeros(0 : Nx₂)
const ρ₀lf = zeros(0 : Nx₂)
const d₀ = zeros(0 : Nx₂)
const cp₁ = zeros(0 : Nx₂)
const cp₂ = zeros(0 : Nx₂)
const cs = zeros(0 : Nx₂)
const ρ₀s = zeros(0 : Nx₂)
const ρ₀l = zeros(0 : Nx₂)
const ρ₀ = zeros(0 : Nx₂)
const μ = zeros(0 : Nx₂)
const K = zeros(0 : Nx₂)
const α₃ = zeros(0 : Nx₂)
const α = zeros(0 : Nx₂)

const u₁ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
```

Press Enter to start Julia.

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia
const u₂ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const v₁ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂-1)
const v₂ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂-1)
const σ₁₁ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const σ₁₂ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const σ₂₂ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const p = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)

const u₁_new = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const u₂_new = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const v₁_new = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂-1)
const v₂_new = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂-1)
const σ₁₁_new = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const σ₁₂_new = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const σ₂₂_new = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const p_new = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)

const δ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const dδ₁ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const dδ₂ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)

const F₁ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)
const F₂ = zeros(0 : Nx₁, 0 : Nx₂)

const coeff1 = zeros(0 : Nx₂)
const coeff2 = zeros(0 : Nx₂)
const coeff3 = zeros(0 : Nx₂)
const coeff4 = zeros(0 : Nx₂)


const NL₁ = round(Int64, L₁ * Nx₂ / Bx₂)
```

Press Enter to start Julia.

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia


const NL₁ = round(Int64, L₁ * Nx₂ / Bx₂)
const NL₂ = round(Int64, L₂ * Nx₂ / Bx₂)


function DefineMediaCoeffs()
    porous_idx = 0 : Nx₂

    ρ₀sf[porous_idx] .= ρ₀sf_porous    ;
    ρ₀lf[porous_idx] .= ρ₀lf_porous    ;
    cp₁[porous_idx] .= cp₁_porous      ;
    cp₂[porous_idx] .= cp₂_porous      ;
    cs[porous_idx] .= cs_porous        ;
    d₀[porous_idx] .= d₀_porous        ;

    for j in 0 : Nx₂
        ρ₀s[j] = (1.0 - d₀[j]) * ρ₀sf[j]
        ρ₀l[j] = d₀[j] * ρ₀lf[j]
        ρ₀[j] = ρ₀s[j] + ρ₀l[j]
        μ[j] = ρ₀s[j] * cs[j]^2.0

        α₃[j] = 1.0 / (2.0 * ρ₀[j]^2.0) * (
            cp₁[j]^2.0 + cp₂[j]^2.0 -
            8.0 / 3.0 * ρ₀s[j] * cs[j]^2.0 / ρ₀[j] +
            sqrt(
                (cp₁[j]^2.0 - cp₂[j]^2.0)^2.0 -
                64.0 / 9.0 * ρ₀l[j] * ρ₀s[j] * cs[j]^4.0 / ρ₀[j]^2.0
            )
        )
    end

```

Press Enter to start Julia.

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia
            )
        )
    end

    for j in porous_idx
        K[j] = 0.5 * ρ₀[j] * ρ₀s[j] / ρ₀l[j] * (
            cp₁[j]^2.0 + cp₂[j]^2.0 -
            8.0 / 3.0 * ρ₀l[j] * cs[j]^2.0 / ρ₀[j] -
            sqrt(
                (cp₁[j]^2.0 - cp₂[j]^2.0)^2.0 -
                64.0 / 9.0 * ρ₀l[j] * ρ₀s[j] * cs[j]^4.0 / ρ₀[j]^2.0
            )
        )
        α[j] = ρ₀[j] * α₃[j] + K[j] / ρ₀[j]^2.0
    end
end


function DefineCoeffs()
    for j in 0 : Nx₂
            coeff1[j] = (ρ₀s[j] * K[j] / ρ₀[j] - 2.0 * μ[j] / 3.0)
        coeff2[j] = ρ₀s[j] * K[j] / ρ₀[j]
        coeff3[j] = -(K[j] - α[j] * ρ₀[j] * ρ₀s[j])
        coeff4[j] = α[j] * ρ₀[j] * ρ₀l[j]

    end
end


function DefineDelta()
    a = 2.0 * max(h₁, h₂)
    a² = a^2.0
```

Press Enter to start Julia.

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia

function DefineDelta()
    a = 2.0 * max(h₁, h₂)
    a² = a^2.0

    for i in 0 : Nx₁, j in 0 : Nx₂
        x₁ = Ax₁ + i * h₁
        x₂ = Ax₂ + j * h₂
        R² = (x₁ - x₁₀)^2.0 + (x₂ - x₂₀)^2.0

        if R² < a²
            δ[i,j] = exp(-a² / (a² - R²))
            dδ₁[i,j] = -2.0 * a² * (x₁ - x₁₀) * exp(-a² / (a² - R²)) / (a
            dδ₂[i,j] = -2.0 * a² * (x₂ - x₂₀) * exp(-a² / (a² - R²)) / (a
        end
    end
end


function DefineRHS(n::Int64)
    @inbounds @threads for i in 0 : Nx₁-1
        @inbounds for j in 0 : Nx₂-1
            f_mid = 0.5 * (f(τ * n) + f(τ * (n + 1)))
            F₁[i,j] = 0.5 * f_mid * (dδ₁[i,j] * δ[i,j] + dδ₁[i+1,j] * δ[i
            F₂[i,j] = 0.5 * f_mid * (δ[i,j] * dδ₂[i,j] + δ[i,j+1] * dδ₂[i
        end
    end
end


function Integrate()
    @inbounds @threads for j in Nx₂-1 : -1 : 1
```

Press Enter to start Julia.

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia


function Integrate()
    @inbounds @threads for j in Nx₂-1 : -1 : 1
        @inbounds for i in Nx₁-1 : -1 : 1
            u₁_new[i,j] = u₁[i,j] - τ * (
                (σ₁₁[i+1,j] - σ₁₁[i,j]) / (h₁ * ρ₀s[j]) +
                (σ₁₂[i,j+1] - σ₁₂[i,j]) / (h₂ * ρ₀s[j]) +
                (p[i+1,j] - p[i,j]) / (h₁ * ρ₀[j]) -
                F₁[i,j]
            )
        end
    end

    @inbounds @threads for i in Nx₁-1 : -1 : 1
        @inbounds for j in Nx₂-1 : -1 : 1
            u₂_new[i,j] = u₂[i,j] - τ * (
                (σ₁₂[i+1,j] - σ₁₂[i,j]) / (h₁ * ρ₀s[j]) +
                (σ₂₂[i,j+1] - σ₂₂[i,j]) / (h₂ * ρ₀s[j]) +
                (p[i,j+1] - p[i,j]) / (h₂ * ρ₀[j]) -
                F₂[i,j]
            )
        end
    end

    @inbounds @threads for j in 0 : Nx₂-1
        @inbounds for i in 0 : Nx₁-1
            v₁_new[i,j] = v₁[i,j] - τ * (
                (p[i+1,j] - p[i,j]) / (ρ₀[j] * h₁) -
                F₁[i,j]
            )
        end
```

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia
        end
    end

    @inbounds @threads for i in Nx₁-1 : -1 : 1
        @inbounds for j in Nx₂-1 : -1 : 1
            v₂_new[i,j] = v₂[i,j] - τ * (
                (p[i,j+1] - p[i,j]) / (ρ₀[j] * h₂) -
                F₂[i,j]
            )
        end
    end

    @inbounds @threads for j in 1 : Nx₂-1
        @inbounds for i in 1 : Nx₁-1
            σ₁₁_new[i,j] = σ₁₁[i,j] - τ * (
                2.0 * μ[j] * (u₁[i,j] - u₁[i-1,j]) / h₁ +
                coeff1[j] * (
                    (u₁[i,j] - u₁[i-1,j]) / h₁ +
                    (u₂[i,j] - u₂[i,j-1]) / h₂
                ) -
                coeff2[j] * (
                    (v₁[i,j] - v₁[i-1,j]) / h₁ +
                    (v₂[i,j] - v₂[i,j-1]) / h₂
                )
            )
        end
    end

    @inbounds @threads for j in 1 : Nx₂-1
        @inbounds for i in 1 : Nx₁-1
            σ₁₂_new[i,j] = σ₁₂[i,j] - τ * μ[j] * (
                (u₁[i,j] - u₁[i,j-1]) / h₂ +
```

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia
        end
    end

    @inbounds @threads for j in 1 : Nx₂-1
        @inbounds for i in 1 : Nx₁-1
            σ₁₂_new[i,j] = σ₁₂[i,j] - τ * μ[j] * (
                (u₁[i,j] - u₁[i,j-1]) / h₂ +
                (u₂[i,j] - u₂[i-1,j]) / h₁
            )
        end
    end


    @inbounds @threads for j in 1 : Nx₂-1
        @inbounds for i in 1 : Nx₁-1
            σ₂₂_new[i,j] = σ₂₂[i,j] - τ * (
                2.0 * μ[j] * (u₂[i,j] - u₂[i,j-1]) / h₂ +
                coeff1[j] * (
                    (u₁[i,j] - u₁[i-1,j]) / h₁ +
                    (u₂[i,j] - u₂[i,j-1]) / h₂
                ) -
                coeff2[j] * (
                    (v₁[i,j] - v₁[i-1,j]) / h₁ +
                    (v₂[i,j] - v₂[i,j-1]) / h₂
                )
            )
        end
    end

    @inbounds @threads for j in 1 : Nx₂-1
        @inbounds for i in 1 : Nx₁-1
            p_new[i,j] = p[i,j] - τ * (
```

Press Enter to start Julia.

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia
                coeff3[j] * (
                    (u₁[i,j] - u₁[i-1,j]) / h₁ +
                    (u₂[i,j] - u₂[i,j-1]) / h₂
                ) +
                coeff4[j] * (
                    (v₁[i,j] - v₁[i-1,j]) / h₁ +
                    (v₂[i,j] - v₂[i,j-1]) / h₂
                )
            )
        end
    end
end


function DumpParaview(n::Int64)
    @assert any(isnan, u₁) == false

    io = open("data.csv.$(n)", "w")
    println(io, "x1,x2,u,v,sigma11,sigma12,sigma22,p")
    @inbounds for i in 0 : Nx₁
        @inbounds for j in 0 : Nx₂
            u, v = 0.0, 0.0
            if 1 <= i <= Nx₁-1 && 1 <= j <= Nx₂-1
                u = 0.5 * sqrt(
                    (u₁[i-1,j] + u₁[i,j])^2.0 +
                    (u₂[i-1,j] + u₂[i,j])^2.0
                )
                v = 0.5 * sqrt(
                    (v₁[i,j-1] + v₁[i,j])^2.0 +
                    (v₂[i,j-1] + v₂[i,j])^2.0
                )
```

Press Enter to start Julia.

Welcome | Working FDM_September_11.jl | Welcome Guide

```julia
            end

            println(io, "$(Ax₁+i*h₁),$(Ax₂+j*h₂),$(u),$(v),$(σ₁₁[i,j]),$(
        end
    end
    close(io)
end


function UpdateTimeLayers()
    u₁ .= u₁_new
    u₂ .= u₂_new
    v₁ .= v₁_new
    v₂ .= v₂_new
    σ₁₁ .= σ₁₁_new
    σ₁₂ .= σ₁₂_new
    σ₂₂ .= σ₂₂_new
    p .= p_new
end


function Start()
    DefineDelta()
    DefineMediaCoeffs()
    DefineCoeffs()

    for n in 0 : LastTimeLayer-1
        if n%10000 == 0
            println(n)
        end
        if n % 1000 == 0
            DumpParaview(n)
```

```
    for n in 0 : LastTimeLayer-1
        if n%10000 == 0
            println(n)
        end
        if n % 1000 == 0
            DumpParaview(n)
        end
        DefineRHS(n)
        Integrate()
        UpdateTimeLayers()
    end

    DumpParaview(LastTimeLayer)
end
print(τ)
# Start()
```

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Код html для интерфейса и визуализации

Раздел <head>

```
<head>
 <meta charset="utf-8">
 <meta name="viewport" content="width=device-width, initial-scale=1">
 <meta name="description" content="">
 <meta name="author" content="Blieva Dana">
 <title> POROELASTICITY PROBLEM </title>
 <link href="https://vjs.zencdn.net/8.5.2/video-js.css" rel="stylesheet" />
 {% load static %}
 <link href="{% static 'css/bootstrap.min.css' %}" rel="stylesheet">
 <style>
  .bd-placeholder-img {
   font-size: 1.125rem;
   text-anchor: middle;
   -webkit-user-select: none;
   -moz-user-select: none;
   user-select: none;
  }
  @media (min-width: 768px) {
   .bd-placeholder-img-lg {
    font-size: 3.5rem;
   }
  }
 </style>

 <!-- Custom styles for this template -->
 <link href="{% static 'css/dashboard.css' %}" rel="stylesheet">
 <link href="{% static 'css/style.css' %}" rel="stylesheet">
</head>
```

Раздел <body>

```
<header class="navbar navbar-dark sticky-top bg-dark flex-md-nowrap p-0 shadow">
 <a class="navbar-brand col-md-3 col-lg-2 me-0 px-3" href="#">Visual</a>
 <button class="navbar-toggler position-absolute d-md-none collapsed" type="button" data-bs-toggle="collapse"
data-bs-target="#sidebarMenu" aria-controls="sidebarMenu" aria-expanded="false" aria-label="Toggle navigation">
  <span class="navbar-toggler-icon"></span>
 </button>
 <div class="navbar-nav">
 </div>
</header>
```

```
<div class="container-fluid">
 <div class="row">
  <nav id="sidebarMenu" class="col-md-3 col-lg-2 d-md-block bg-light sidebar collapse">
   <div class="position-sticky pt-3" style="overflow-y: scroll; height: 100%;">
    <form id="form">
     {% csrf_token %}
     <div class="mx-3">
      <h5 class="d-flex mb-1 text-muted">
       <span>INPUTS</span>
      </h5>
      <ul class="nav flex-column">
```

```html
<li class="nav-item">
  <div class="input-group input-group-sm mb-2">
    <span class="input-group-text w-25">
      <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
        <mstyle displaystyle="true" scriptlevel="0">
          <mrow data-mjx-texclass="ORD">
            <mtable rowspacing=".5em" columnspacing="1em" displaystyle="true">
              <mtr>
                <mtd>
                  <msubsup>
                    <mi>&#x3C1;</mi>
                    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
                      <mn>0</mn>
                      <mo>,</mo>
                      <mi>s</mi>
                    </mrow>
                    <mi>f</mi>
                  </msubsup>
                </mtd>
              </mtr>
            </mtable>
          </mrow>
        </mstyle>
      </math> = </span>
    <input type="text" class="form-control" name="p0sf" id="p0sf" value="1500.0">
  </div>
  <label for="p0sf" class="form-label">physical density of the solid matrix</label>
</li>
```

```html
<li class="nav-item">
  <div class="input-group input-group-sm mb-2">
    <span class="input-group-text w-25"><math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
      <mstyle displaystyle="true" scriptlevel="0">
        <mrow data-mjx-texclass="ORD">
          <mtable rowspacing=".5em" columnspacing="1em" displaystyle="true">
            <mtr>
              <mtd>
                <msubsup>
                  <mi>&#x3C1;</mi>
                  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
                    <mn>0</mn>
                    <mo>,</mo>
                    <mn>1</mn>
                  </mrow>
                  <mi>f</mi>
                </msubsup>
              </mtd>
            </mtr>
          </mtable>
        </mrow>
      </mstyle>
    </math> = </span>
    <input type="text" class="form-control" name="p0lf" id="p0lf" value="1000.0">
  </div>
  <label for="p0lf" class="form-label">physical density of the liquid</label>
</li>
```

```html
<li class="nav-item">
  <div class="input-group input-group-sm mb-2">
    <span class="input-group-text w-25"><math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
      <mstyle displaystyle="true" scriptlevel="0">
        <mrow data-mjx-texclass="ORD">
          <mtable rowspacing=".5em" columnspacing="1em" displaystyle="true">
            <mtr>
              <mtd>
                <msub>
                  <mi>c</mi>
                  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
                    <mi>p</mi>
                    <mn>1</mn>
                  </mrow>
                </msub>
              </mtd>
            </mtr>
          </mtable>
        </mrow>
      </mstyle>
    </math> = </span>
    <input type="text" class="form-control" name="cp1" id="cp1" value="2100.0">
  </div>
  <label for="cp1" class="form-label">fast longitudinal wave propagation velocity </label>
</li>
<li class="nav-item">
  <div class="input-group input-group-sm mb-2">
    <span class="input-group-text w-25"><math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
      <mstyle displaystyle="true" scriptlevel="0">
        <mrow data-mjx-texclass="ORD">
          <mtable rowspacing=".5em" columnspacing="1em" displaystyle="true">
            <mtr>
              <mtd>
                <msub>
                  <mi>c</mi>
                  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
                    <mi>p</mi>
                    <mn>2</mn>
                  </mrow>
                </msub>
              </mtd>
            </mtr>
          </mtable>
        </mrow>
      </mstyle>
    </math> = </span>
    <input type="text" class="form-control" name="cp2" id="cp2" value="500.0">
  </div>
  <label for="cp2" class="form-label">a slow longitudinal wave propagation velocity</label>
</li>
<li class="nav-item">
  <div class="input-group input-group-sm mb-2">
    <span class="input-group-text w-25"><math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
      <mstyle displaystyle="true" scriptlevel="0">
        <mrow data-mjx-texclass="ORD">
          <mtable rowspacing=".5em" columnspacing="1em" displaystyle="true">
            <mtr>
              <mtd>
                <msub>
                  <mi>c</mi>
                  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
                    <mi>s</mi>
                  </mrow>
                </msub>
              </mtd>
            </mtr>
          </mtable>
        </mrow>
      </mstyle>
    </math> = </span>
    <input type="text" class="form-control" name="cs" id="cs" value="1400.0">
  </div>
  <label for="cs" class="form-label">shear wave propagation velocity</label>
</li>
```

```html
      <li class="nav-item">
       <div class="input-group input-group-sm mb-2">
        <span class="input-group-text w-25"><math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
         <mstyle displaystyle="true" scriptlevel="0">
          <mrow data-mjx-texclass="ORD">
           <mtable rowspacing=".5em" columnspacing="1em" displaystyle="true">
            <mtr>
             <mtd>
              <msub>
               <mi>c</mi>
               <mrow data-mjx-texclass="ORD">
                <mn>0</mn>
               </mrow>
              </msub>
             </mtd>
            </mtr>
           </mtable>
          </mrow>
         </mstyle>
        </math> = </span>
        <input type="text" class="form-control" name="d0" id="d0" value="0.2">
       </div>
       <label for="cs" class="form-label">porosity</label>
      </li>
       </ul>
      </div>
     </form>
     <div class="input-group input-group-sm mb-2 px-3">
      <button id="julia-FDM" class="form-control text-center" onclick="submit()">
       <div id='FDM-text' style="display: block;">
        Start FDM
       </div>
       <div class="spinner-border m-auto" style="display: none;" role="status" id='FDM-load'>
        <span class="visually-hidden">Loading...</span>
       </div>
      </button>
     </div>
     <h5 class="d-flex justify-content-between align-items-center px-3 mt-3 mb-1 text-muted">
      <span>LOGS</span>
     </h5>
     <pre id = 'log' class="p-3">
     </pre>
    </div>
   </nav>
  <div class="d-flex justify-content-between flex-wrap flex-md-nowrap align-items-center pt-3 pb-2 mb-3 border-bottom">
   <h1 class="h2">Scene</h1>
   <div class="btn-group me-2 mb-md-0">
    <button id="generate-video-u" type="button" class="btn btn-sm btn-outline-secondary" onclick="generate_video('u')">
      Generate video U
    </button>
    <button id="generate-video-v" type="button" class="btn btn-sm btn-outline-secondary" onclick="generate_video('v')">
      Generate video V
    </button>
   </div>
  </div>
```

```
    <div class="row">
      <div class="col-6">
        <div style="height: 50px;">
          <div class="spinner-border m-auto" style="display: none;" role="status" id='Video-load-u'>
            <span class="visually-hidden">Loading...</span>
          </div>
          <div id='Video-load-u-text'>
            <span></span>
          </div>
        </div>
        <video ="my-video-u" class="video-js" controls preload="auto" width="100%" height="100%" data-setup='{"fluid":
true,"disablePictureInPicture" : true}'>
          <source src="{% static '/output_video_u.mp4' %}" type="video/mp4" />
        </video>
      </div>
      <div class="col-6">
        <div style="height: 50px;">
          <div class="spinner-border m-auto" style="display: none;" role="status" id='Video-load-v'>
            <span class="visually-hidden">Loading...</span>
          </div>
          <div id='Video-load-v-text'>
            <span></span>
          </div>
        </div>
        <video id="my-video-v" class="video-js" controls preload="auto" width="100%" height="100%" data-setup='{"fluid":
true,"disablePictureInPicture" : true}'>
          <source src="{% static '/output_video_v.mp4' %}" type="video/mp4" />
        </video>
      </div>
    </div>
    <div class="d-flex justify-content-between flex-wrap flex-md-nowrap align-items-center pt-3 pb-2 mb-3">
      <div class="btn-group me-2 mb-md-0">
        <div class="spinner-border m-auto" style="display: none;margin-right: 10px!important;" role="status" id='Downloading-load'>
          <span class="visually-hidden">Loading...</span>
        </div>
        <button id="get-dataset-zip" type="button" class="btn btn-sm btn-outline-secondary" onclick="get_dataset()">
          Download zip dataset
        </button>
      </div>
    </div>
    </div>
   </main>
  </div>
</div>
   <script src="{% static 'js/bootstrap.bundle.min.js' %}"></script>
   <script src="https://cdn.jsdelivr.net/npm/feather-icons@4.28.0/dist/feather.min.js" integrity="sha384-
uO3SXW5IuS1ZpFPKugNNWqTZRRglnUJK6UAZ/gxOX80nxEkN9NcGZTftn6RzhGWE" crossorigin="anonymous"></script><script
src="https://cdn.jsdelivr.net/npm/chart.js@2.9.4/dist/Chart.min.js" integrity="sha384-
zNy6FEbO50N+Cg5wap8IKA4M/ZnLJgzc6w2NqACZaK0u0FXfOWRRJOnQtpZun8ha" crossorigin="anonymous"></script><script
src="{% static 'js/dashboard.js' %}"></script>
   <script src="https://code.jquery.com/jquery-3.7.1.js"></script>
   <script src="{% static 'js/script.js' %}"></script>
   <script src="https://vjs.zencdn.net/8.5.2/video.min.js"></script>
   <script>
    document.addEventListener('DOMContentLoaded', function() {
      var player_u = videojs('my-video-u', {
          /* Video.js options go here */
        });
      var player_v = videojs('my-video-v', {
         /* Video.js options go here */
      });
    });
  </script>
  </body>
</html>
```

generate_video.py

```
import pyvista as pv
import pandas as pd
import os
from .video import record_video

def plotting(csv_path,image_path,point_cloud,plotter,max=0.001,first = False, method = 'u'):
    data = pd.read_csv(csv_path)
    point_cloud.points = data[['x1', 'x2', method]].values
    point_cloud[method] = data[method].values
    delaunay = point_cloud.delaunay_2d()
    plotter.clear()
    plotter.add_mesh(delaunay,  scalars=method, cmap='jet', clim=[0, max])
    if first:
        plotter.camera_position = 'xy'
        plotter.camera.roll=180
    text_position = (0.0, 0.0, 62.0)
    text = 't = ' + csv_path.split('.')[−2]
    plotter.add_text(text, position=text_position, font_size=20, color='black')
    plotter.screenshot(image_path)
    return image_path

# project_path = 'C://github_repositories//julia//JPBapp//'+'/app/scripts/'

def max_value_u(project_path,method='u'):
    m = 0
    for i in range(0000,100001,1000):
        file_path = 'data/data.{}.csv'.format(i)
        # print(project_path + file_path)
        if os.path.isfile(os.path.join(project_path, file_path)):
            data = pd.read_csv(project_path + file_path)
            m = max(data[method].max(),m)
    return m

def generate(method):
    project_path = os.getcwd()+'/app/scripts/'
    plotter = pv.Plotter(off_screen=True)
    # plotter.open_movie(project_path + 'output_video.mp4')

    point_cloud = pv.PolyData()
    frames=[]
    first = True
    max_u = max_value_u(project_path,method = method)
    for i in range(0000,100001,1000):
        file_path = 'data/data.{}.csv'.format(i)
        print(file_path)
        if os.path.isfile(os.path.join(project_path, file_path)):
            frames.append(plotting(project_path + file_path, project_path +'frames/frame_{}.jpeg'.format(i),point_cloud,plotter,max_u,first=first,method
= method))
            first=False
    plotter.close()

    record_video(image_folder=os.getcwd()+'/app/scripts/frames/',fps=5,video_name=project_path +
'output_video_{}.mp4'.format(method),images=frames)
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Акты внедрения

АО “Нефтяная компания “КОР”

Юридический адрес: Республика Казахстан, г. Кызылорда, проспект Н.Назарбаева, д. №29.
Почтовый адрес: Республика Казахстан, г. Кызылорда, проспект Н.Назарбаева, д. №29. E-mail: info@kor.kz
/факс: 8 (7242) 23-13-00 (1005), (1097), 23-14-41, 23-11-81, 23-11-71, 23-13-23, 23-14-84, 23-15-51, 23-14-94, 23-15-65
БИН 991140000357, ИИК KZ786017201000001535, БИК: HSBKKZKX в КФ АО «Народный Банк Казахстана»

17.01.24

№ 06/56

АКТ ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТ

Разработанный группой исследователей Блиевой Д.Н., Байгереевым Д.Р.(PhD), Жаппас Ж.А. вычислительный алгоритм решения динамических уравнений пороупругости, составленный на языке программирования Julia и программный комплекс с удобным интерфейсом, составленном на языках HTML, Python, Java Script используется для построения имитационной модели продуктивных пластов в целях анализа изменений порового давления, скорости движения пластовых жидкостей и твердых частиц, вызывающих деформацию и возможную просадку уровня почвы вокруг скважин. Интерфейс используется для введения исходных значений параметров, автоматического запуска вычислений и получения динамической визуализации результатов вычислений, с указанием времени, затраченного на вычислительный процесс. Результаты вычислений необходимы для прогнозирования и снижения негативных последствий деформации пластов в процессе эксплуатации месторождений углеводородного сырья.

Генеральный директор
АО «Нефтяная компания КОР» Узаков Д.Д.

«Нефтяная компания «КОР»

Жауапкершілігі шектеулі серіктестік
«АКТАУ-ТРАНЗИТ»
Товарищество с ограниченной ответственностью
БСН/БИН 000740003881
г. Актау, 4 микрорайон, 23/2 здание, 3 этаж

шығыс/исх. № 37/1
от 12 января 2024 года

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

Разработанный Блиевой Д.Н. вычислительный алгоритм решения динамических уравнений пороупругости и программный комплекс, составленный на языках программирования Julia с удобным интерфейсом, разработанным на языках HTML, Python, Java Script используется для построения имитационной модели продуктивных пластов в целях анализа изменений порового давления, скорости движения пластовых жидкостей и др, и возможного уровня просадки почвы вокруг скважин. Интерфейс используется для введения исходных значений параметров, автоматического запуска вычислений и получения динамической визуализации результатов вычислений, с указанием времени, затраченного на вычислительный процесс. Результаты вычислений необходимы для прогнозирования и снижения негативных последствий деформации пластов в процессе эксплуатации месторождений углеводородного сырья.

С уважением,

Заместитель директора по производству
ТОО «Актау-Транзит» **Мудебаев А.Х.**

«Актау-Транзит»